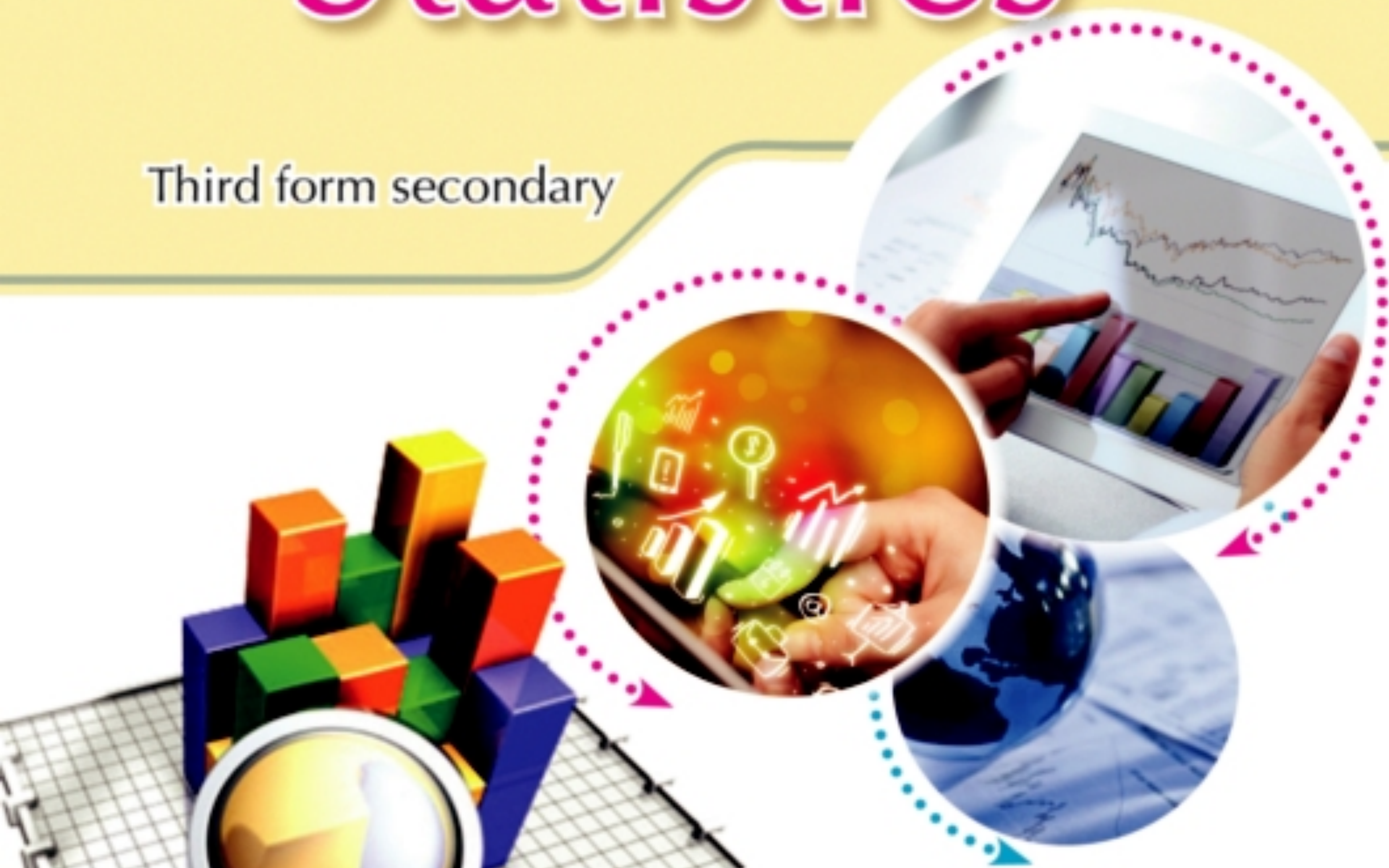
Arab Republic of Egypt
Ministry of Education
&Technical Education
Central Administration of
Book Affairs

Statistics

Third form secondary



2019 - 2020

Student Book

Name : ....

Class : ....

School: ....

Authors

Mr. Kamal Younis Kabsha

Prof.Dr. Ahmed Kamal El-kholy

Revised by

Mr . Mohamed Farouk Mohamed

Mr. Samir Mohamed sedawy

First eddition 2016 / 2017

Deposit number 8701 / 2016

I.S.B.N 5 - 029 - 706 - 977 - 978

Introduction

بسم الله الرحمن الرحيم

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التى تم فى ضوئها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيمايلى:

١ تنمية وحدة المعرفة وتكاملها فى الرياضيات، ودمج المفاهيم والترابط بين كل مجالات الرياضيات المدرسية.

٢ تزويد المتعلم بما هو وظيفى من معلومات ومفاهيم وخطط لحل المشكلات.

٣ تبنّى مدخل المعايير القومية للتعليم فى مصر والمستويات التعليمية وذلك من خلال:

أ) تحديد ما ينبغى على المتعلم أن يتعلمه ولماذا يتعلمه.

ب) تحديد مخرجات التعلم بدقة، وقد ركزت على مايلى:

أن يظل تعلم الرياضيات هدف يسعى المتعلم لتحقيقه طوال حياته - أن يكون المتعلم محبًا للرياضيات ومبادرًا بدراستها - أن يكون المتعلم قادرًا على العمل منفردًا أو ضمن فريق - أن يكون المتعلم نشطًا ومثابرًا ومواظبًا ومبتكرًا - أن يكون المتعلم قادرًا على التواصل بلغة الرياضيات.

٤ اقتراح أساليب وطرق للتدريس وذلك من خلال كتاب (دليل المعلم).

٥ اقتراح أنشطة متنوعة تتناسب مع المحتوى ليختار المتعلم النشاط الملائم له.

٦ احترام الرياضيات واحترام المساهمات الإنسانية منها على مستوى العالم والأمة والوطن، وتعرف مساهمات وإنجازات العلماء المسلمين والعرب والأجانب.

وأخيرًا ..نتمنى أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولمصرنا العزيزة.

والله من وراء القصد، وهو يهدى إلى سواء السبيل

Contents

Contents

Unit 1

Correlation and Regression

introduction

Statistics is an important branch of mathematics which has various applications since it concerns with gathering, representing and reducing the data in the form of digital indicators to describe, measure and analyze the basic features of such data in order to take the right decisions. Statistics has wide applications in all fields of physical, human, economic and social sciences. In this unit, we are going to focus on analyzing the bivariate data and studying the degree of the direction of the relation between the two variables and the shape of this relation. Initially, we study the correlation which reveals the degree and the power of the relation between the two variables. This relation may be in the form of a direct or inverse form. It is worth mentioning that the correlation studies the relation and its direction between a variable and another. It is necessary to realize that the relation does not refer to causation because it does not refer to the existence of an effect to a variable on the other as it will be shown in Lesson 1 in this Unit. In this unit also, you are going to study the simple linear regression which concerns with estimating the form of this relation through which you can predict the value of the dependent variable if the value of the independent variable is known. It gets more accurate, the more the sample randomly chosen. You will study some modern technologies about the scientific calculators and the computer statistical programs such as(SPSS) to perform the calculations and to graph the data related to the correlation and the linear regression between two phenomena.

Unit objectives

By the end of the unit and carrying out the involved activities, the students should be able to

- Identify what is meant by correlation between two variables.
- Calculate the correlation coefficient between two variables in different ways (Pearson's method and Spearman's method) and interpret them mathematically.
- Understand the meaning of the regression line and estimate its importance to study the relation between two variables.
- Represent the relation between two variables in a Cartesian diagram and judge from the graph the existence of the relation and the power of its degree.
- Identify the meaning of the liner regression coefficient and interpret what can be deduce by knowing the value of such a coefficient.
- Find the regression line equation of any of the two variables on the other using the least squares method.
- Use the calculator and computer to perform the mathematical calculations and graph the data of the correlation and the linear regression between two phenomena.
- Use a given regression line equation to predict the value of one of the two variables in terms of the corresponding value of the other variable.
- Apply the correlation and the linear regression in research situations.
- Appreciate contributions of using the correlation and the linear regression in solving social and daily life problems.

Key Terms

- Correlation
- Regression
- Linear correlation
- Correlation Coefficient
- Direct Correlation
- Inverse Correlation
- Scatter diagram
- Pearson Correlation coefficient
- Spearman Correlation coefficient
- Regression Line
- Least Square

Lessons of the unit

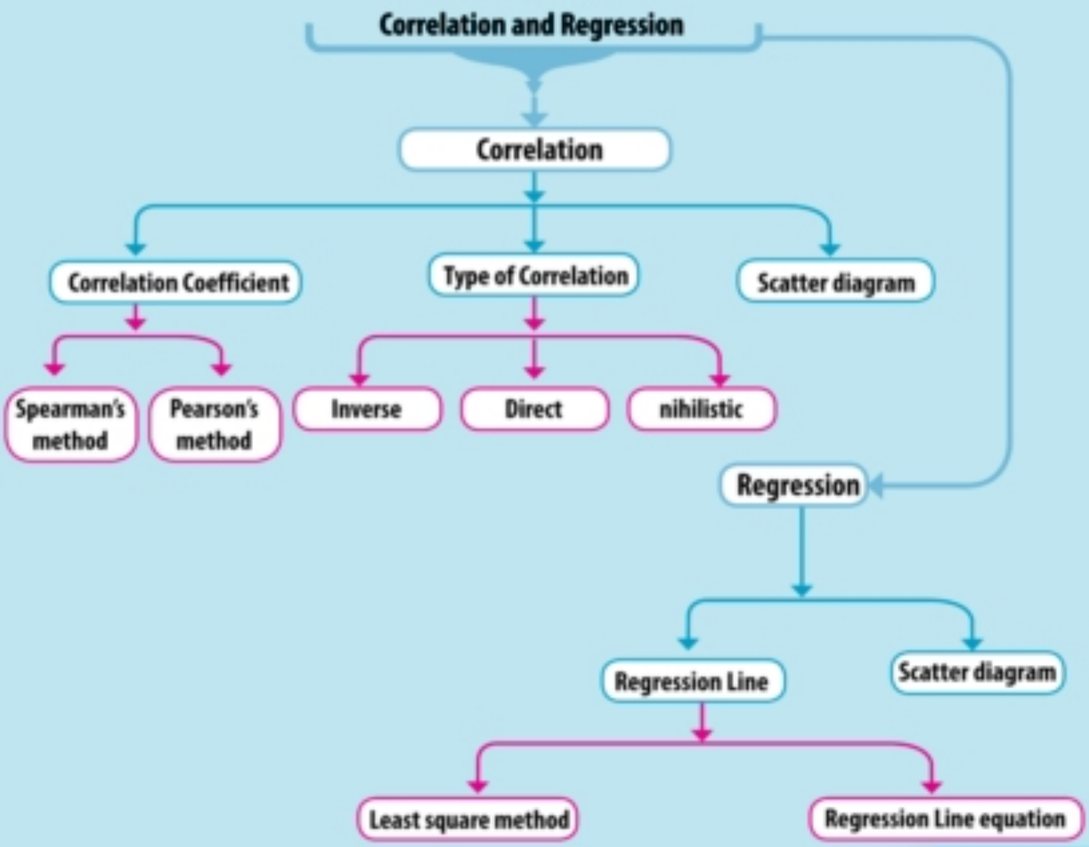
Lesson (1-1) Correlation

Lesson (1-2) Regression

Materials

Scientific calculator - excel program - Spss program

Chart of the unit



Unit one
1 - 1 Correlation

You will learn

- Definition of correlation
- Scatter diagram
- Direct correlation and inverse correlation
- Linear correlation coefficient
- Pearson's linear correlation coefficient
- Spearman's rank correlation coefficient

Key terms

- Correlation
- Linear Correlation
- Correlation Coefficient
- Direct Correlation
- Inverse Correlation
- Scatter diagram
- Pearson Correlation Coefficient
- spearman`s rank correltion coefficient

Introduction:

You have previously learned in Statistics how to describe a set of data representing a phenomenon using some statistical scales such as the scales of the central tendency, dispersion and the coefficient of variation. In this lesson, you are going to learn how to describe the items of two different phenomena in accordance to the relation between both. In other words, if one of the two variables has changed in a certain direction(by increasing or decreasing), the other variable leans to change in a certain direction by increasing or decreasing, too. In this case, the correlation is called a direct correlation. If one of the two variable changes in the direction of increasing and the other changes in the direction of decreasing and vice versa, the correlation in this case is called the inverse correlation.

Correlation:

Think and discuss

meditate the following examples and record your observations:

1- The relation between the side length and the area of the square.
2- The relation between the blood pressure and the age.
3- The increase in the price of an item and the demands of buying it.
4- The decrease of temperature and the demand to consume the fuel.
5- The relation between rising of the sea level and the rise of the temperature.

From the examples above, we observe that:

- The two correlated variables change in the same direction. I.e. the increasing or decreasing of a variable leads to the increasing or decreasing of the other as in examples 1,2 and 3. It is said the correlation between both variables is positive (direct).

materials — Scientific calculator

In examples 4 and 5, we notice that two correlated variables inversely change. In other words, the increasing or decreasing of one variable leads to decreasing or increasing of the other variable. hence, it is said that the correlation between them is negative (inverse).

Definition Correlation is a statistical method by which the degree and the type between two variables can be determined.

The relation between the two variables ranges from a strong degree to a weak one. When the relation between the two variables is strong, it means that knowing the value of one variable will help to predict the value of the other variable. On the contrary, when the relation is weak, it means that knowing the value of one variable will not help to predict the value of the other variable.
One of the most important methods helping us identify the degree and type of the relation between the two variables is the Scatter Diagram.

Scatter diagram

Definition Scatter Diagram is a graphical representation of a number of the ordered pairs (x,y) to describe the relation between two variables.

If we denote the first phenomenon by the symbol (x) and the second phenomenon by the symbol (y), then the next diagrams illustrate the relation between x and y which show the scatter diagram.

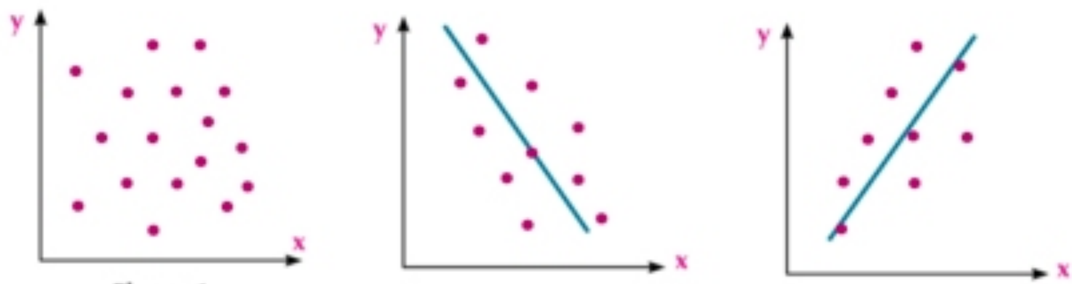


Figure 1 There is no correlation

Figure 2 There is an inverse linear correlation

Figure 3 There is a direct linear correlation

Linear Correlation

Definition The simple linear correlation is known as the measure of the degree of the relation between two variables.

Activity

graph the scatter diagram for each of the following data mentioning the type of the relation expressing such data.

①

x	7	8	9	10	11	12
y	13	14	17	18	21	23

②

x	3	4	7	8	11	15
y	23	22	20	18	17	16

(3)

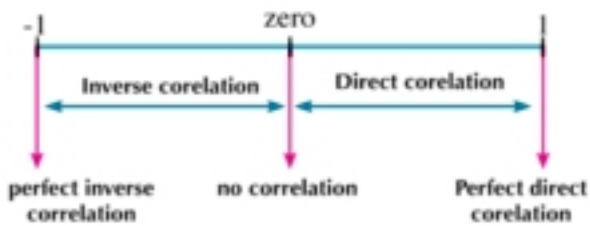
x	7	9	11	13	15	16
y	14	7	20	6	12	10

Correlation Coefficient

The correlation coefficient is denoted by the symbol (r). It is a relatively quantitative scale measuring how much the two variables are correlated where $-1 \leqslant r \leqslant 1$. It is said the correlation is perfect direct if the correlation coefficient $r = 1$, is perfect inverse if the correlation coefficient $r = -1$ and the correlation is nihilistic when $r = 0$.

We notice that:

The nearer the value of the correlation coefficient to 1 is, the stronger the direct correlation between the two variable is and the nearer its value to zero is, the weaker the direct correlation is and we will say the same in the inverse correlation. The opposite figure shows that.



Oral expression: Multi -choice:

The strongest correlation coefficient of the following is:

a -0.8 **b** -0.5 **c** 0.4   **d** 0.7

Pearson`s Correlation coefficient

Suppose we have a set of (n) people and we get data from those people about the values of two variables x and y. The data we get ought to be on the form:

The values of first variable x: $x_1 , x_2 , x_3 , \ldots\ldots\ldots\ldots , x_n$

The values of second variable y: $y_1 , y_2 , y_3 , \ldots\ldots\ldots\ldots , y_n$

If we denote the correlation coefficient by the symbol (r), then Pearson's correlation coefficient between the two variables x and y or the linear correlation coefficient can be found from the relation:

$$r = \frac{n\sum x\,y - (\sum x \times \sum y)}{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2}\ \sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}}$$

Where: "Σ" is the symbol of summation notation and read as the sum.

n denotes the number of the items.

$\sum x = x_1 + x_2 + x_3 \ldots\ldots + x_n$,

$\sum y = y_1 + y_2 + y_3 \ldots\ldots + y_n$,

$\sum x\,y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \ldots\ldots + x_n y_n$

$\sum x^2 = x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 \ldots\ldots + x^2_n$,

$\sum y^2 = y_1{}^2 + y_2{}^2 + y_3{}^2 \ldots\ldots + y_n{}^2$

Example

1) The next table shows the marks of 10 students in the history and geography subjects.

history x	75	80	93	65	87	71	98	69	84	78
geography y	82	78	86	72	91	80	95	73	89	74

Required is to calculate the Pearson's correlation coefficient between the two variables x and y and identify the type of the correlation.

Solution

We form the next table:

x	y	x^2	y^2	x y
75	82	5625	6724	6150
80	78	6400	6084	6240
93	86	8649	7396	7998
65	72	4225	5184	4680
87	91	7569	8281	7917
71	80	5041	6400	5680
98	95	9604	9025	9310
69	73	4761	5329	5037
84	89	7056	7921	7476
78	74	6084	5476	5772
Σx =800	Σy =820	Σx^2 =65014	Σy^2 =67820	Σxy =66260

$$\because r = \frac{n\,\Sigma xy - (\Sigma x \times \Sigma y)}{\sqrt{n\,\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}\,\sqrt{n\,\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

$$\therefore r = \frac{10 \times 66260 - (800 \times 820)}{\sqrt{10 \times 65014 - (800)^2}\sqrt{10 \times 67820 - (820)^2}}$$

$$= \frac{6006}{\sqrt{10140}\,\sqrt{5800}} \simeq 0.8606$$

The correlation is direct .

Try to solve

1) **From the data of the next table:**

x	20	23	24	25	28	30
y	35	31	30	27	29	28

Calculate the Pearson's correlation coefficient (linear) between the two variables x and y and identify its type

Using the scientific calculator:

A lot of scientific calculators in the markets are supporting to find the sums of the columns in the table above and calculate the correlation coefficient as follows:

- **Preparing the calculator for the statistics system:**

  By pressing MODE then 3

Statistical and regression calculations	MODE 3 (STAT)

  Select from the drop-down list:

Paired-variable (X, Y), linear regression ($y = A + Bx$)	2 (A+BX)

- **Entering the data:**

  Fill the shown table in the figure in all the values of (x and y) by typing the number existed in a table After typing the number, press = until you finish typing all the values of (x and y).

  MODE 3 (STAT) 2 (A+BX)

- **Recalling the products:**

  Press the buttons. SHIFT 1 (STAT) to get 3:sum

  And select from this list each of n:

  $1 : \Sigma x^2$, $2 : \Sigma x$, $3 : \Sigma y^2$, $4 : \Sigma y$, $5 : \Sigma xy$

  By pressing the buttons from 1 to 5 severally liable.

  To find the correlation coefficient (r) press the following buttons:

  (STAT), from the drop-down list, press 5 : Reg

  And from the drop-down list, press 3: r to get the value of the correlation coefficient required between the two variables x and y.

Activity

Use the calculator to check the answer of the example above

The program (SPSS)

The program (SPSS) is the abbreviation of (Statistical Package for Social Science). It is a set of comprehensive mathematical packs or data to analyze such data. This program is used in the scientific researches involving digital data.

The program can read all the data of different files, analyzing them, getting the results and giving statistical reports. The programs also allows the users to edit the data in the form of variables and new data using the equation. You can also use the program to save the data in files and naming or editing the names of the data files. You can also pack up the data and files through controlling the order and selection list available in this program. This can be done to include all the stages of analyzing the data and the statistical process via four main steps:

1 - Coding the data.

2 - Placing the data in the program.

3 - Selecting the proper form and testing and analyzing the data.

4 - Identifying the variable data to be analyzed and to fulfill the statistical process.

Operating the SPSS program:

You can start the SPSS program by pressing the window (START) in the main list, then go to the (program) list and search for the SPSS program within two times to open the program.

Components of the programs and their function:

Command list:

It is a special task bar for this program where the user can select the order which he /she wants through pressing the icon of each statistical order and then the results are viewed in the report board. The command list contains nine main orders. When you press any of them, they get branched into sub- orders besides, the (help) icon.

Data view:

It is a screen where the user can control adding or cancelling the dependent data for each variable. The user can add any independent variable in a column on the data view where the user can convert to view or watch the variables by pressing and moving between the two orders (Variable View) and (Data View) placed on the left of the variable view.

Variable view:

The view of defining the variable data which contains parallel columns and each column contains special data for each variable. To view the definition of each variable, the user ought to use the mouse to do (Double Click) or to press the order (Variable View) placed under the definition view. At this very minute, the shape of the view get changed and the definition bar appears:

Name	Type
Width	Values

When you press the definition bar, the coding (denotation)appears. After that, press the button (Add) to view the value of the symbol and position.

Steps you can control:

(1) **The ability to recall the previous data:** The user can control the process of recalling the data and files by pressing the button (File), then the button (Open). The user selects the file containing the data wanted to be recalled which contain the statistical reports done before and finally presses the button (Save).

(2) **Saving the new changes in a file:** The user can save the new changes in a file by pressing the order (Save) or the order (Save as) to save and name the new selected file.

(3) **Adding edits and managing the variables:** The user goes to the (Data Editor) and add the data he /she wants to be able to:

- edit the value of the data.
- Defining the variables; identifying the type of the added data, the economic indicators and all the variables.

(4) **The user can add a new variable** view and watch the arrange of the changes happened by using the main order (Data), then follow each variable that the user wants such as adding a variable or adding a new view or editing the arrangement of the data.

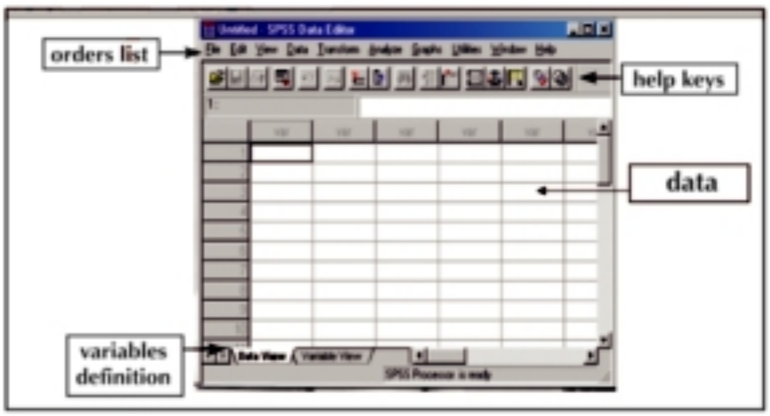
(5) **Forming a fully new variable** using an equation where the user goes to (Transform), then moving to (Compute) and identifies the name of the new variable in the list (Targer Variable).

(6) **The ability to cancel any variable or view.**

(7) **Ordering the view** where the program sets up a new variable containing a serial number in order to order the views ascendingly or descendingly.

(8) **Performing a statistical process** identifying and graduating the statistical description and the repetition of data.

(9) **The ability of graphing the variables** through setting up a graph to view the variable analysis and interpret what happened to the new variables.



Activity

You can visit the next site to download the SPSS: *http://www-01.ibm.com/software/analytics/spss/* to check the example above.

Example

(2) Find the pearson's correlation coefficient between the two variables x and y and identify its type if.

$\Sigma x = 68$ $\Sigma y = 36$ $\Sigma xy = 348$

$\Sigma x^2 = 620$ $\Sigma y^2 = 204$ $n = 8$

Solution

$$\because r = \frac{n\,\Sigma xy - (\Sigma x \times \Sigma y)}{\sqrt{n\,\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}\,\sqrt{n\,\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

$$\therefore r = \frac{8 \times 348 - (68 \times 36)}{\sqrt{8 \times 620 - (68)^2}\,\sqrt{8 \times 204 - (36)^2}} = \frac{336}{\sqrt{336}\,\sqrt{336}} = 1$$

The value of the correlation coefficient (+1) means that the relation between the two variables x and y is perfect direct.

Try to solve

(2) Find the pearson's correlation coefficient between the two variables x and y and identify its type if.

$\Sigma x = 92$ $\Sigma y = 36$ $\Sigma xy = 372$

$\Sigma x2 = 1100$ $\Sigma y2 = 204$ $n = 8$

Spearman's Rank Correltion Coefficient

Think and discuss

A statistician has studied the relation among the degrees of two school subjects for seven students and has recorded the results in the next table:

Subjects 1	Weak	Pass	Weak	good	Weak	excellent	Very good
Subjects 2	Weak	Pass	good	Pass	Weak	Very good	Pass

can you help the statistician , to realize the relation between those two subjects and find the correlation coefficient between them?

We cannot use Pearson's correlation coefficient in "Think and discuss" since it depends on the quantitative (numerical)data only. In this case, the data are descriptive (as in the previous title). another correlation coefficient can be used _ Spearman's rank correlation coefficient. It gives a measure to the correlation in both the descriptive and quantitative data which are ordered as in the previous title. This coefficient relies on the order of the variable values taking into consideration the ascending and descending order. Then, we use the next relation:

$$r = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{n(n^2 - 1)}$$

Where D is the difference between the order of the two variables x and y and n is the number of the values of each variable.

Notice that:

- Spearman's correlation coefficient can be calculated whether the data are quantitative or descriptive, whereas Pearson's correlation coefficient can be calculated only if the variables are quantitative.
- Spearman's rank correlation coefficient is characterized with its easiness even the data are not ordered.
- The Spearman's correlation coefficient does not regard the difference of the numbers when the ranks are calculated and though, it is less accurate.

Example

(3) Find Spearman's rank correlation coefficient in the previous "Think and discuss" and identify its type.

Solution

In this example, we order the two phenomena a regular ascending order by giving each student a rank for a subject so does the other subject for the same student as shown in the next table.

Subjects 1	Weak	Pass	Weak	good	Weak	excellent	Very good
Ordering with repetition	1	4	2	5	3	7	6
Final repetition	2	4	2	5	2	7	6

We notice that the case "weak" has repeated three times and occupied the places 1,2 and 3.

hence, the rank of each = $\frac{1+2+3}{3}$ = 2 (it is the arithmetic mean of the numbers 1,2 and 3) , and similarly,

Subjects 2	Weak	Pass	good	Pass	Weak	Very good	Pass
Ordering with repetition	1	3	6	4	2	7	5
Final repetition	1.5	4	6	4	1.5	7	4

We notice that the level "weak" has repeated twice and occupied the places 1 and 2.

hence, the rank of each = $\frac{1+2}{2}$ = 1.5 it is the arithmetic mean of the numbers 1 and 2).

Also, the level"pass" has repeated three times and occupied the places 3,4 and 5.

hence, the rank of each = $\frac{3+4+5}{3}$ = 4 We summarize the solution in the table as follows:

x	y	Ranks of x	Ranks of y	D	D^2
Weak	Weak	2	1.5	0.5	0.25
Pass	Pass	4	4	zero	zero
Weak	good	2	6	−4	16
good	Pass	5	4	1	1
Weak	Weak	2	1.5	0.5	0.25
excellent	Very good	7	7	zero	zero
Very good	Pass	6	4	2	4
					21.5

$\because r = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{n(n^2-1)}$

$= 1 - \frac{129}{336} \simeq 0.6161$

$\because r = 1 - \frac{6 \times 21.5}{7(49-1)}$

It is a direct correlation.

Try to solve

(3) In a study about the relation between the students' levels in statistics and mathematics, the degrees of six students have been as follows:

Degrees of statistics(x)	Pass	Very good	excellent	Very good	Pass	Pass
Degrees of mathematics (y)	good	good	Very good	excellent	good	Weak

calculate the Spearman's rank correlation coefficient among the degrees and identify its type.

Example

(4) calculate the Spearman's rank correlation coefficient between x and y through the data of the next table:

x	4	7	8	5	8	12
y	7	6	6	4	6	10

Solution

Form the next table:

x	y	ranks x	ranks y	D	D^2
4	7	6	2	4	16
7	6	4	4	0	0
8	6	2.5	4	-1.5	2.25
5	4	5	6	-1	1
8	6	2.5	4	-1.5	2.25
12	10	1	1	0	0
					21.5

$\because r = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{n(n^2-1)}$ $\therefore 1 = \frac{6 \times 21.5}{6(36-1)}$ $\simeq 0.3857$ The correlation is direct

Critical thinking: Does ΣD^2 vary if we order the two phenomena x and y ascendingly? explain your answer

Try to solve

(4) Calculate the Spearman's rank correlation coefficient between x and y and identify its type from the data shown in the next table:

x	10	7	8	7	6	4
y	5	8	7	9	9	10

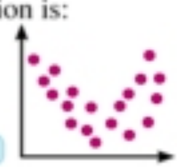
Exercises 1 - 1

First: Choose the correct answer:

1. The strongest correlation coefficient of the following is:
   a) -0.94 b) zero c) 0.5 d) 0.85

2. The strongest inverse correlation coefficient of the following is:
   a) -0.2 b) -0.5 c) -0.7 d) -0.8

3. the scatter diagram representing inverse correlation is:

a  b  c  d 

4. The weakest correlation coefficient of the following is:
   a) -1.2 b) -0.7 c) 0.12 d) 0.9

5. One of the next numbers can represent the strongest inverse correlation coefficient between two variables:
   a) 0.3 b) 0.9 c) -1.1 d) -0.95

Answer the following questions

6. From the data of the next table

x	12	10	14	11	12	9
y	18	17	23	19	20	15

First: Calculate Spearman's rank correlation coefficient between the two variables x and y.
Second: Calculate Pearson's linear correlation coefficient between x and y.

7. From the data of the next table

x	7	7	8	3	7	11
y	8	4	12	2	10	11

Calculate Spearman's rank correlation coefficient between the two variables x and y.

8. From the data of the next table

x	1	3	4	6	7	9
y	6	4	4	3	2	1

Calculate Pearson's correlation coefficient between the values of x and y and show its type.

9. From the data of the next table

x	6	5	7	8	10	6	7
y	4	7	5	6	8	7	8

Calculate Pearson's correlation coefficient between the values of x and y and show its type.

10 From the data of the next table

x	3	1	6	4	3	8
y	7	4	5	8	6	7

Calculate Spearman's rank correlation coefficient between x and y and show its type.

11 From the data of the next table

x	Very good	Very good	good	Weak	Pass	Very good
y	good	Pass	good	excellent	Very good	Pass

Calculate Spearman's rank correlation coefficient between x and y.

12 Find Pearson's correlation coefficient between the values of x and y and show its type if:

$\Sigma x = 220$ $\Sigma y = 140$ $\Sigma x y = 2658$

$\Sigma x^2 = 5486$ $\Sigma y^2 = 2292$ $n = 10$

13 Trade: The following table shows a 6 - book group in regard to its price (x) and the sales (y).

Price (x)	Low	Very low	Average	Very high	high	Very high
Sales (y)	high	high	Very high	Low	Average	Low

Calculate Spearman's rank correlation coefficient between the price and sale of the book.

14 Advertisement: An advertising company has decided to study the relation between its expenditure on advertisement x (in thousand L.E) and its sales y (in thousand units). If the data of the company's eight branches are as follows:

x	19	18	7	10	4	13	15	5
y	12	10	7	9	6	13	14	12

Find the rank correlation coefficient between the expenditure and sales and show its type.

15 Education The next data represent the marks of ten students in chemistry and biology.

chemistry	60	85	55	90	65	50	80	70	95	75
biology	55	75	50	95	60	65	85	80	90	70

Calculate Pearson's linear correlation coefficient and determine its type.

16 Birth: In a study to determine the relation between the mother's age and the number of her kids, the following data have been determined:

mother's age	18	20	23	27	29	32	33	35
number of kids	2	1	1	2	3	4	3	5

Calculate spearman's rank correlation relation and determine its type.

Unit one

1 - 2 Regression

Regression

You will learn

- Definition of regression
- Types of regression
- Regression line equation
- Method of least squares
- Activities on finding regression line equation

Key terms

- Regression
- Regression line
- Least squares

Introduction:

You have previously studied the function and identified its graph. In the previous lesson, you learned the scatter diagram and you also realized that the objective of graphing it is to identify the nature of the relation between two variables x and y through the data related to both variables. You also learned that the properties of the correlation between two phenomena can be in the form of the following:

Linear Relation	negative Linear Relation
non-Linear Relation	no Relation

In this lesson, you are going to learn how to identify the regression line equation. The purpose of this study is to help the researcher know the type of the given data and perform correct predictions through them.

Remember

- **The function is a relation between the two sets x and y where each element of set x elements has only one element of set y elements**
- **The function is defined whenever each domain, Codomain and rule are known.**

Definition Regression is a statistical method by which the value of a variable can be estimated in terms of the other variable.

It has several types:

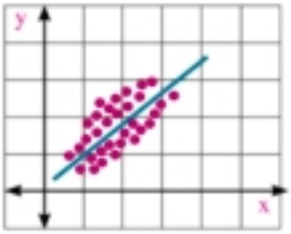
a **simple linear regression:**in which, the dependent variable (y) depends on one variable (x) through a linear relation.

b **multiple regression:**in which, the dependent variable (y) depends on more than an independent variable.

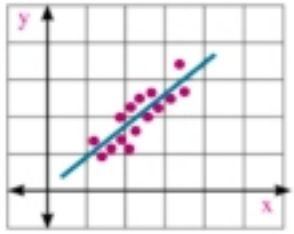
c **Non-linear regression:** if the relation between the dependent variable (y) an nonlinear independent variables (of second degree, third degree, exponential, or logarithmic....).

In this lesson, we concentrate only on the simple linear regression. The following figures illustrate the relation between the value of the correlation relation and the difference of the point positions on the regression line. The closer the points are congruent to this line, the more the value of (r) increases or decreases till all the points get congruent on the line. In this case, the value of (r) is either (+1) or (-1).

materials: scientific calculator Microsoft Excel

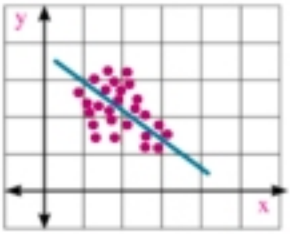


(1) moderate direct correlation

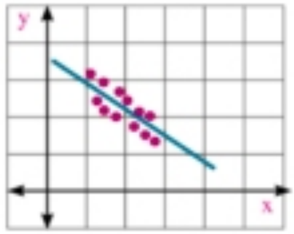


(2) strong direct correlation

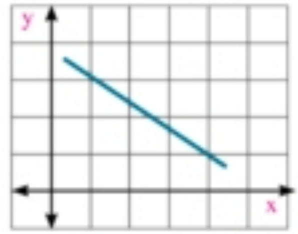
(3) perfect direct correlation



(4) moderate inverse correlation



(5) strong inverse correlation correlation



(6) perfect inverse correlation

Regression line equation:

You have previously learned in the analytic geometry the straight line equation whose slope is m and y-intercept of c is $y = mx + c$.

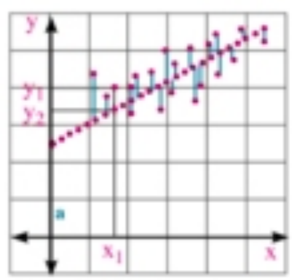
In turn to the scatter diagrams shown previously, we find that if the scatter diagram starts as in figures (2) or (5), this indicates that the relation between the two variables are linear. Since we can imagine in the existence of a straight line, the points are located on and near the straight line even all the points do not lie on it. If the scatter diagram starts as in figures (1) or (4), we doubt about the linearity of the relation between the two variables. As a result, our main mission here is to use the seen pairs of values (x_r , y_r) to find the best straight line matching the points of the set of the sample. Let its equation be:

$$y = a + bx$$

The most common method to find the best values of a and b is called the least square method.

The least square method:

Of the mentioned previously, we knew that in case of correlation, it is not necessary all the points lie on the regression line. Therefore, there is an error ratio for the points which do not lie on the regression line. To get the best regression line, the least possible valued deviations should be reduced (the proper regression line should pass or approach to the greatest number of scattering points). if (x, y) is a true point of data and $(x, \hat{y})$ is the point locating off on the regression line ($\hat{y}$ is read as y hat), then the proper regression line when $|\hat{y} - y|$ is the least for the values of x or when $\Sigma(\hat{y} - y)^2$ is the least and by supposing the regression line equation is $\hat{y} = a + bx$.



The absolute difference = $|(a + bx)-y|$

The required is to determine the values of a,b such that the absolute difference is minimum by solving the following two equations

$\Sigma y = n a + b \Sigma x$ **(1)** $\Sigma x y = a \Sigma x + b \Sigma x^2$ **(2)**

From equation **(1)** $a = \dfrac{\Sigma y - b \Sigma x}{n}$ And by substituting in **(2)**.

$b = \dfrac{n \Sigma x y - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$ s called the regression coefficient of y on x. It expresses the slope of the regression line on the positive direction of X axis.

The regression line equation of y on x is used for:

1- predicting the value of Y if the value of X is known.

2- identifying the error which can be identified by the relation:

Error = | Table value - the value satisfying the regression equation |

Note: when the regression equation is used for prediction (estimation), it is favorable not to exceed the range of the variable x used in calculating the regression equation much.

Critical thinking: the value of the regression coefficient refers to the correlation. Explain.

Example

1 The next table illustrates the production of a summer crop (y) of the cultivated land (x) in feddan.

ultivated land (x) in feddan	50	200	110	80	120	74.5	88.9	5.7	11	3.2
Production of (y) in kg	140	500	400	300	356	240.5	200.6	33.5	69.8	18.7

First: find the regression line equation.

Second: predict the value of the production in kg if the cultivated land is 100 feddans.

Third: find the error in the production if you know that the cultivated land is 120 feddans.

Solution

Solution by using the scientific calculator:

1- enter the data:

Follow up the same method explained previously in Example (1) in the previous lesson (correlation) to enter the data.

2-recall the products(results):

Press the following buttons:

Use the following buttons to find the results of the following operations: SHIFT 1 (STAT) from the drop-down list and press the button Select 3

A new list from 1 to 8 (sums of results) appears and you select as follows:

$$2 : \Sigma x = 743.3$$
$$4 : \Sigma y = 2259.1$$
$$1 : \Sigma x^2 = 89017.19$$
$$5 : \Sigma xy = 254489.18$$

First: we calculate the value of the constant b from the relation:

$$b = \frac{n\,\Sigma xy - \Sigma x\,\Sigma y}{n\,\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{10 \times 254489.18 - 743.3 \times 2259.1}{10 \times {}^2(743.3) - 89017.19} \simeq 2.5637$$

we calculate the value of the constant a from the relation: $a = \overline{y} - b\,\overline{x}$

Where : $\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n}$, $\overline{y} = \frac{\Sigma y}{n}$

$\therefore \overline{x} = \frac{743.3}{10} = 74.33$, $\overline{y} = \frac{2259.1}{10} = 225.91$

$\therefore a = 225.91 - 2.5637 \square 74.33 \simeq 35.35$

Note:

The constant can be directly calculated as follows:

$\because a = \frac{\Sigma y - b\,\Sigma x}{n}$ $\quad \therefore a = \frac{2259.1 - (2.5637 \times 743.3)}{10} \simeq 35.35$

$\therefore$ The regression line equation is : $\hat{y} = 2.564\,x + 35.35$

Second: From the regression line equation: $\hat{y} = a + b\,x$

$\because \hat{y} = 2.564\,x + 35.35$, $x = 100$

$\therefore \hat{y} = 2.564 \square 100 + 35.35 = 291.72$ Kg

The result can be checked using the calculator as follows:

100 [SHIFT] [1] (STAT) [5] (Reg) [5] : $\hat{y}$ [=]

Third: To find the error in the production if you know that x= 120 feddans:

$\because \hat{y} = 2.564\,x + 35.35$

$\therefore \hat{y} = 2.564 \square 120 + 35.35 \simeq 343$

$\because$ Error = |Table value - the value satisfying the regression equation|

$\therefore$ Error = $|356 - 343| = 13$

Activity

First: check the solution of the example above using (Microsoft Excel).

Second: check the solution of the example above using the statistical program (SPSS).

First: using (Microsoft Excel)

1- start (Microsoft Excel) and enter the previous data in the cells of the two columns a and b under the name x and y as two real variables or the real name of such data as shown in figure 1.

2- from the tool bar, press chartwizard to get chart type, then from the list xy scatter, press finish as in figure 2.

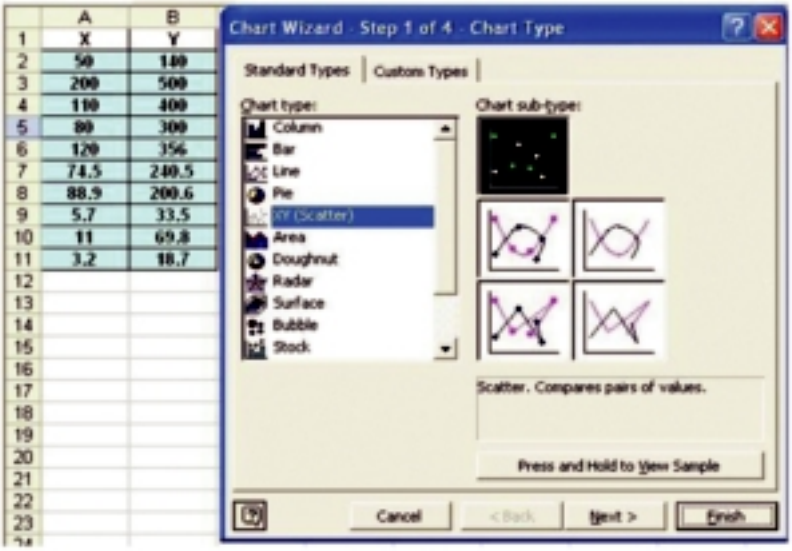


figure (2)

3- figure 3 illustrates the graphical representation of the points listed in the table and is called scatter diagram. We select the figure shaded in black which appears here after changing the background as shown in the figure.

4- the values on the horizontal axis represent the values of X for the data and the vertical axis of the values Y. were, we are going to find the regression line equation which is in the form:

$y = a + bx.$

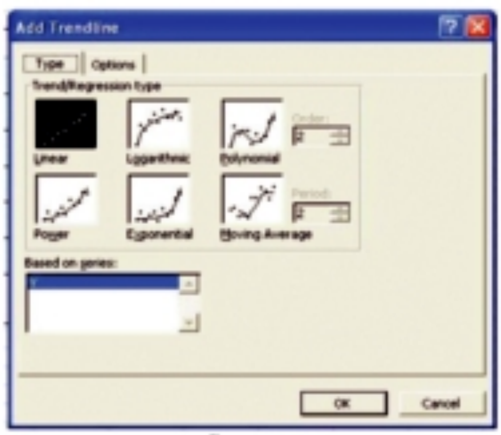


figure 3

5- do a mouse right click on a point (in figure 4). the shown list appears where we select Add Trendline and by doing a mouse click, we get the following figure which appears in six scatter diagrams. We have selected the first scatter diagram as shown by shading in black as a proper choice. Since we need the straight line, we use Option to identify the required by doing a mouse click where the following box appears:

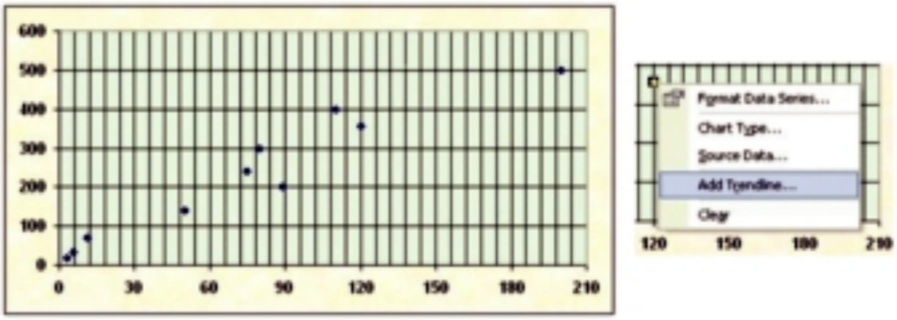


figure (4)

6 - label Display equation on chart as shown in figure 5.

7 - press OK to get the required:

a the figure showing the regression line is the moderate of the points representing the data pairs.

b the regression line equation in figure 6. were, we have moved the equation from its place in the figure above and changed the line to illustrate the matter.

The following figure is the result of the operation and it shows the required especially the following equation:

$Y = 35.35 + 2.5637x$

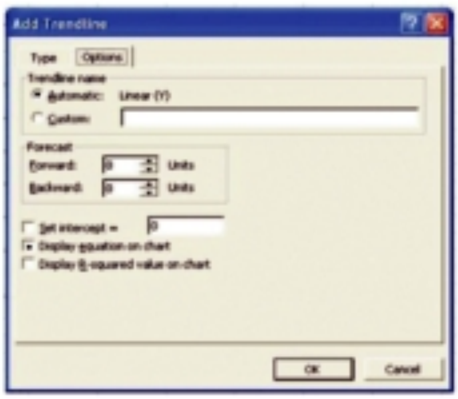


figure (5)

It is a regression line equation and it is the same equation which we have got in the previous solution.

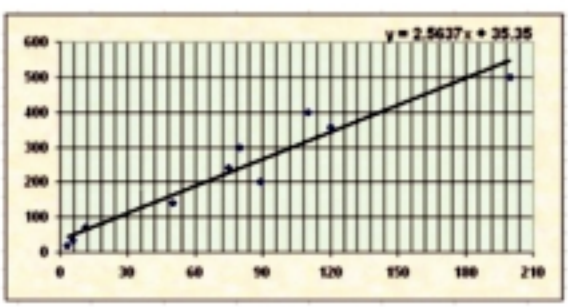


figure (6)

Using SPSS program

(figure 7)

Example

(2) Mining: the following table shows the data about the average price of the oil barrel and the rates of the economic growth in a country within eight years. Required is to:

Price of the oil barrel (x)	36	40	36.2	31.1	29.7	16.3	18.7	14.6
Rates of the economic growth(y)	0.91	3.5	3.2	2.7	2.3	– 1	– 0.9	– 1.6

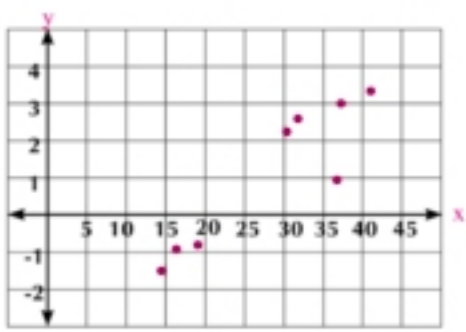
First: graph the scatter diagram and show the type of the correlation.

Second: find the regression line equation of the given data.

Third: predict the economic growth when the price of the oil barrel is \$15, then when the price is \$35.

Solution

First: the figure opposite represents the scatter diagram and it shows also the correlation is direct.



x	y	x2	y2	x y
36	0.91	1296	0.8281	32.76
40	3.5	1600	12.25	140
36.2	3.2	1310.44	10.24	115.84
31.1	2.7	967.21	7.29	83.97
29.7	2.3	882.09	5.29	68.31
16.3	− 1	265.69	1	− 16.3
18.7	− 0.9	349.69	0.81	− 16.83
14.6	− 1.6	213.16	2.56	− 23.36
222.6	9.11	6884.28	40.2681	384.39

From the table data:

$\Sigma y = 9.11$ $\quad\quad$ $\Sigma x = 222.6$

$\Sigma x\, y = 384.39$ $\quad\quad$ $\Sigma x^2 = 6884.28$

Second: we calculate the value of the constant b from the relation:

$$b = \frac{n\,\Sigma x\,y - \Sigma x\,\Sigma y}{n\,\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{8 \times 384.39 - (222.6 \times 9.11)}{8 \times^2 (222.6) - 6884.28} \simeq 0.1896$$

$\because a = \dfrac{\Sigma y - b\Sigma x}{n}$ $\quad\quad$ $\therefore a = \dfrac{9.11 - (0.1896 \times 222.6)}{8} \simeq -4.1368$

$\because$ The regression line equation is: $\hat{y} = a + b\,x$

$\hat{y} = 0.1896 \;\therefore x - 4.1368$

Third:

When $x = 15$ $\quad$ then : $\hat{y} = 0.1896 \times 15 - 4.1368 \simeq -1.2928$

When $x = 35$ $\quad$ then : $\hat{y} = 0.1896 \times 35 - 4.1368 \simeq 2.4992$

Try to solve

1. in a study to find the relation between the income (x) and consumption (y) in thousand pounds, the results show that:

$\Sigma x = 120$, $\Sigma y = 100$, $\Sigma xy = 516$

$\Sigma x^2 = 720$, $\Sigma y^2 = 410$, $n = 40$

a find the linear correlation coefficient between x and y using the Pearson's method and identify its type.

b find the regression line equation.

c predict the value of consumption (y) when the income is 10000 LE

Exercises 1 - 2

First: choose the correct answer:

1. the statistical equation of the regression line equation where b is the regression coefficient is:
   - a) $\hat{y} = a x + b$
   - b) $\hat{y} = a + b x$
   - c) $\hat{y} = a y + b$
   - d) $\hat{y} = a + b y$.
2. if the regression line equation is: $\hat{y} = 2 + 0.5x$ then the value of y expected when x = 6 is:
   - a) 4
   - b) 5
   - c) 7
   - d) 8
3. if the two points (11.5 , 10) and (6.5 , 5) lie on the regression line y on x, then the correlation between x and y is:
   - a) direct
   - b) inverse
   - c) perfect
   - d) nihilistic
4. if the two points (5 , 13) ,and (14 , 4) lie on the regression line y on x, then all the following points lie on the same line except:
   - a) (15 , 5)
   - b) (10 , 8)
   - c) (6 , 12)
   - d) (5 , 13)
5. if all the points in a scatter diagram lie on a straight line whose slope is negative, then the correlation coefficient between x and y equals:
   - a) 1
   - b) zero
   - c) - 0.5
   - d) -1
6. if all the points in a scatter diagram lie on a straight line whose slope is positive, then the correlation coefficient between the two variables equals:
   - a) - 1
   - b) zero
   - c) $\frac{1}{2}$
   - d) 1

Second: Answer the following questions:

7. the next table illustrates the relation between the two variables x and y:

x	5	8	10	14	16	20
y	4	6	9	11	12	15

   - a) graph the scatter diagram
   - b) find the regression line equation
   - c) predict the value of y when x = 12

8. from the data in the next table:

x	20	33	30	40	13	15	26	25
y	7	8	9	11	4	5	8	9

   - a) predict the value of y when x = 35
   - b) find the error in y if x= 30

9. in a statistical study to find the relation between two variables x and y, we have got the next data:
$n = 10$, $\overline{x} = 8$, $\overline{y} = 10$, $\Sigma xy = 870$, $\Sigma x^2 = 665$, $\Sigma y^2 = 1400$ find:

a. linear correlation coefficient

b. regression line equation

10. if : $\Sigma x = 30$, $\Sigma y = 40$, $\Sigma xy = 162$
$\Sigma x^2 = 210$, $\Sigma y^2 = 304$, $n = 6$ find :

a. regression line equation

b. linear correlation coefficient between x and y and identify its type

11. sales: In a market for selling used cars, the sales were as follows:

car age (x)	3	2	1	1	5	6	1	4
Sale price (y)	54	80	74	98	45	40	85	60

Find:

a. Pearson's linear correlation coefficient

b. Regression line equation

12. Economy: the next table represents the monthly income (x) and the expenditure (y) for a group of families in hundred pounds:

Income (x)	38	27	39	40	56	66	42	44
expenditure (y)	19	25	20	28	31	38	27	22

a. find Pearson's rank correlation coefficient and identify its type.

b. find the regression line equation

c. Estimate the value of the expenditure (y) if the income (x) is 5000 LE

d. find the error in (y) if (x)= 40

13. Family to study the relation between the income (y) and consumption (x) in hundred pounds monthly in a city, a 40- family sample has been taken to give the following results:
$\Sigma x = 100$, $\Sigma y = 120$, $\Sigma xy = 516$, $\Sigma x2 = 410$, $\Sigma y^2 = 720$.

a. find the regression line equation

b. predict the family income whose monthly consumption is 700 LE.

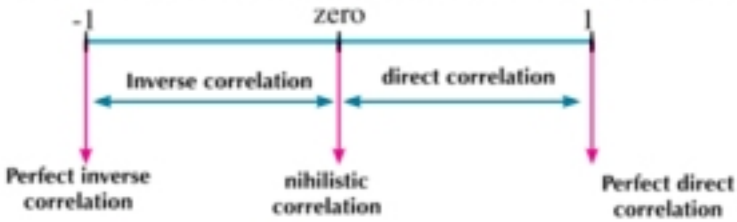
Unit summary

1 **Correlation** is a statistical method by which the degree and the type between two variables can be determined.

2 **Scatter diagram** is a graphical representation of a number of the ordered pairs (x,y) to describe the relation between two variables

3 **Simple linear correlation** is known as the measure of the degree of the relation between two variable

4 Correlation coefficient is denoted by the symbol (r). It is a relatively quantitative scale measuring how much the two variables are correlated where $-1 \leqslant r \leqslant 1$ It is said that the correlation is perfect direct if the correlation coefficient r = 1, is perfect inverse if the correlation coefficient r = -1 and the correlation is not existed when r =0.



5 **Pearson's linear correlation coefficient**:

$$r = \frac{n\,\Sigma x\,y - \Sigma x \times \Sigma y}{\sqrt{n\,\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}\,\sqrt{n\,\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

6 **Spearman's rank correlation coefficient**:

$$r = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{n(n^2 - 1)}$$

7 **Regression** is a statistical method by which the value of a variable can be estimated in terms of the other variable.

8 **Regression line equation:** $\hat{y} = a + b\,x$

where :

a is the length of y-intercept

b is the regression coefficient of y on x and it expresses the slope of the regression line on the positive direction of X-axis.

$$\mathbf{b} = \frac{n\,\Sigma x\,y - \Sigma x\,\Sigma\,y}{n\,\Sigma x^2 - (\,\Sigma x)^2}\,,\ a = \frac{\Sigma y - b\Sigma\,x}{n}$$

9 **The regression line equation is used for:**

Predicting the value of y if the value of x is known

Identifying the error which can be determined by the relation:

Error = | Table value - the value satisfying the regression equation |

General exercises

First: choose the correct answer:

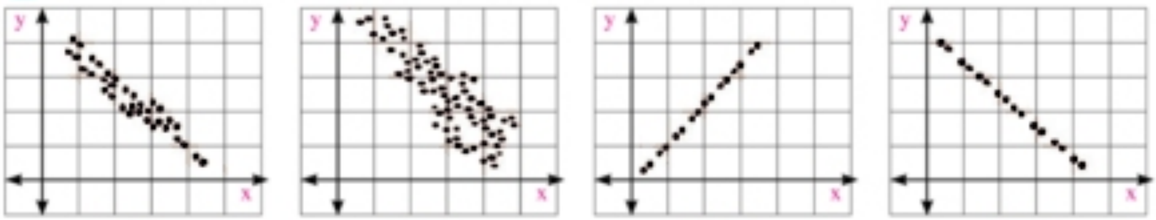
1. The strongest inverse correlation coefficient of the following is:

   a) -0.9 b) -0.5 b) -0.1 d) zero

2. The smallest correlation coefficient of the following is:

   a) -1.1 b) -0.9 b) 0.12 d) 1.02

3. the figure shows a strong inverse correlation between x and y is figure:



a b c d

4. If the regression line equation is: $\hat{y} = 3 - x$ then the type of the correlation between the two variables x and y is:

   a) perfect direct b) non-correlation c) nihilistic d) perfect inverse

5. If the regression line equation is: $\hat{y} = 7 - 0.8$, then the value of y expected when $x = 5$ is:

   a) 2 b) 3 c) 5 d) 7

6. If the two point $(2 , 8)$ and $(7 , 3)$ lie on the regression line of y on x and the correlation is perfect, then the linear correlation coefficient equals:

   a) -1 b) zero c) $\frac{1}{2}$ d) 1

Second: Answer the following questions:

7. If

   $\Sigma x = 50$ $\Sigma y = 40$ $n = 10$

   $\Sigma xy = 213$ $\Sigma x^2 = 298$ $\Sigma y^2 = 176$

   Find the value of Pearson's correlation coefficient between the two variables and identify its type and degree.

8. From the data of the following table:

x	4	5	6	7	8	9	10
y	12	7	12	3	14	15	21

calculate Pearson's correlation coefficient between the two variables and identify its type.

9. From the data of the following table:

x	32	42	40	35	31	46	50	33
y	25	34	35	30	17	28	42	19

Calculate Spearman's rank correlation coefficient between the values of x and y and identify its type.

10. From the data of the following table:

x	excellent	good	Very good	Pass	weak	good
y	good	weak	pass	excellent	Very good	pass

Calculate Spearman's rank correlation coefficient between x and y.

11. Trade: the next table illustrates the sales x and the profits y for a 6- company group. Required is to calculate Pearson's correlation coefficient between the size of sales and the profits.

Sales x	500	600	400	480	550	100
Profits y	300	400	250	200	400	90

12. From the data of the following table:

x	10	12	15	12	14	8
y	6	8	6	6	9	5

a. Calculate Pearson's linear correlation coefficient between the two variables and identify its type.

b. Find the regression line equation, then predict the value of $\hat{y}$ When $x = 7$.

13. Trade:

To study the relation between the quantity (y) of an item and the price (x) in LE, we have got the next data:

$\Sigma x = 49$, $\Sigma y = 77$, $\Sigma xy = 609$, $\Sigma x^2 = 371$, $\Sigma y^2 = 1049$, $n = 7$ find :

a. Pearson's linear correlation coefficient between the quantity required and the price:

b. Estimate the quantity ($\hat{y}$) When the price is 21 LE.

14. Sports: the next tables illustrates the age of a person and the number of training hours.

Age	20	25	33	37	50	58
number of training hours	10	6	3	2	1.5	1

a. Find the regression line equation

b. Predict the number of training hours when this person is 40 years old.

c. Calculate the error when this person is 33 years old.

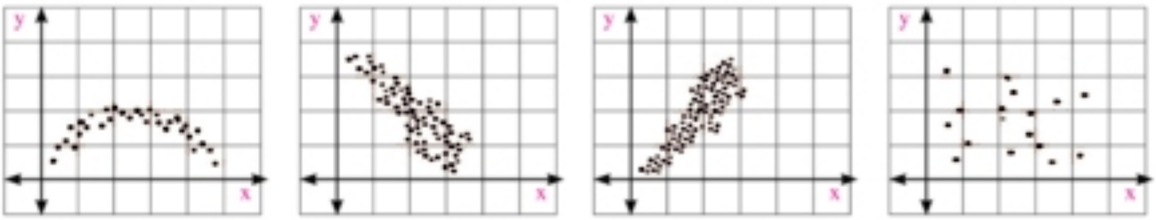
For more activities and exercises www.sec3mathematics.com.eg

Accumulative test

Short-answerd questions

First: choose the correct answer (From 1 to 10):

1. the sum of the values whose mean is 8 and their number 7 equal:
   a 40 b 56 c 60 d 80
2. the figure representing a direct relation between x and y is:



a b c d

3. The relation between the square side length and its area is a .... correlation:
   a strong direct b strong inverse c perfect direct d perfect inverse
4. If the two variables increase or decrease together, the correlation between them is
   a direct. b inverse. c non-linear. d nihilistic.
5. The correlation coefficient of a digital scale whose value ranges between
   a $[0 , 1]$ b $]-1 , 1[$ c $[-1 , 1]$ d $[-1 , 1] - \{0\}$
6. The variable required to be estimated in the regression line equation is called a (n) .... variable.
   a independent b dependent c direct d inverse

Second: Give the reason:

7. The sign of regression coefficient refers to the type of correlation (direct or inverse). Explain.

Long- answered questions:

8. From the data in the opposite table

x	65	66	67	67	68	69
y	70	72	68	64	68	67

   a Find the linear correlation coefficient between the two variables x and y and identify its type.
   b Predict the value of $\hat{y}$ when $x = 62$
   c Calculate the error in y if $x = 66$

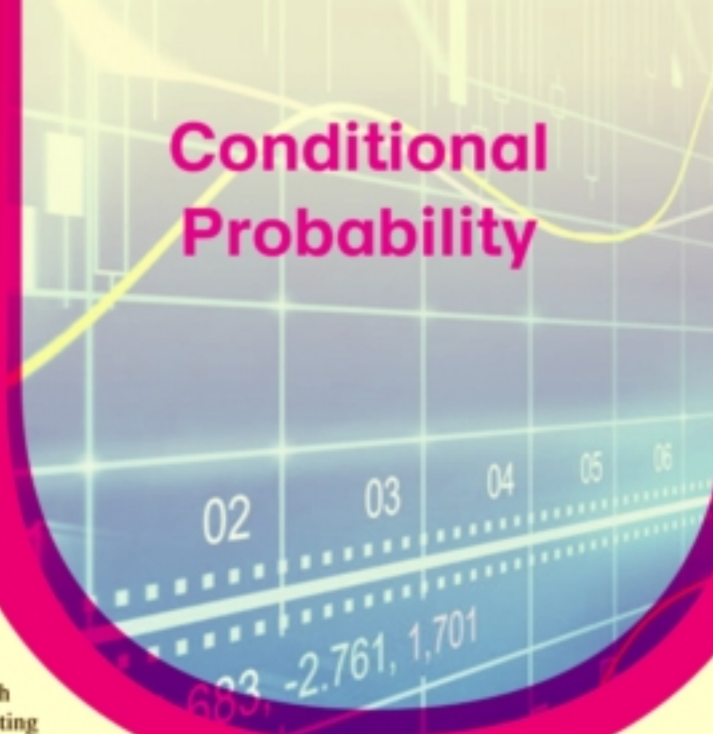
9. The next table illustrates the relation between a driver's age and the number of the traffic tickets he got in a year.

Driver's age (x)	45	28	52	24	56	32	63	38
number of traffic tickets (y)	4	7	2	7	2	5	1	3

   a Find the rank correlation coefficient between x and y
   b Find the regression line equation of y on x c Estimaten $\hat{y}$ if $x = 40$
   d Calculate the error in y if $x = 38$

Unit 2

Conditional Probability



introduction

We have previously known that statistics is a branch of mathematics concerning with collecting, ordering and interpreting data in order to get the ability to take the proper decisions for a certain phenomenon. The probabilities are considered the mathematical background for the statistical methods. Long ago, the researchers used the probabilities for social, economic and healthy reasons.

The probability has been founded as it is today by a great number of scientists such as the French scientist (Pierre Simon Laplace- 1749- 1827), the English scientists (De Morgan 1806- 1871), (John Vin 1834-1923) and the Russian scientist (Andrei Markov 1856-1922) and others.


Pierre Simon Laplace


De Morgan


John Vin


Andrei Markov

It is worth mentioning that the applications of statistics and probability are much in the educational, social and economic fields. In this unit, we are going to learn the conditional probability between two events, its theory and its applications in the different daily life situations. Besides, we will learn the independent and dependent events.

Unit objectives

By the end of the unit and carrying out the involved activities, the students should be able to.

- Identify the mutually exclusive events and events are not mutually exclusive
- Identify the conditional probability
- Deduce theories on the conditional probability
- Identify the independent and dependent events
- Apply the conditional probability in the different daily life situations

Key Terms

- *Mutually Exculusive events*
- *Events are not mutually exclusive*
- *Conditional probability*
- *Independent Events*
- *Dependent Events*

Lessons of the unit

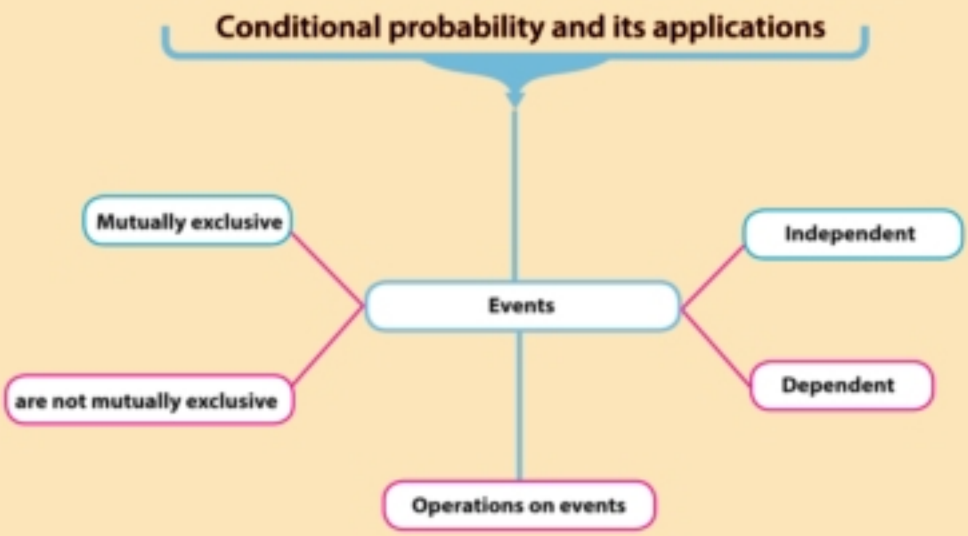
Lesson (2-1): Conditional probability

Lesson (2-1): Independent events.

Materials

Scientific Calculator

Unit planning organizer



Unit Two

2 - 1 Conditional Probability

You will learn

- Mutually exclusive events
- Events are not mutually exclusive
- Conditional probability

Key terms

- Mutually Exclusive Events
- Events are not Mutually Exclusive
- Conditional probability

Introduction:

You have previously learned to calculate the probability of an event (let it be A) of a random experiment by knowing the relation between the number of the elements of this event n(A) and the number of the elements of the sample space of the random experiment n(S) through the relation

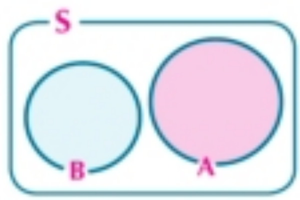
$$P(A) \text{ (the probability of occurring even A)} = \frac{\text{the number of outcomes in event } n(A)}{\text{the number of outcomes in sample space } n(s)}$$

Mutually Exclusive Events

Of your study to the probability, you have learned that the mutually exclusive events are the events which cannot occur at the same time because when an event occurs, the other events are hindered to occur. This means that there are not common elements of the elements forming them.

Mutually exclusive events:

They are the two events which do not share in any element and their intersection is the null set ϕ.

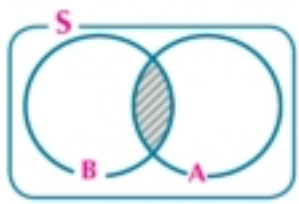


If A and B are two mutually exclusive events, then $A \cap B = \phi$

$\therefore P(A \cap B) = \text{Zero}$ and $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Events are not Mutually Exclusive

They are the two events in which if an event occurs, it does not trap the occurrence of the other(there are common elements between them).Then,



(1) $P(A \cup B) = B(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(2) $P(A') = 1 - P(A)$

(3) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

(4) $P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

(5) $P(A' \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$

Materials

- Scientific calculator - Computer graph program.

Conditional Probability

If A and B are two events from S, sometimes the information is available that an events such as B has been occurred P (B). in this case, the occurrence of the event B may affect the probability of occurring the event A. The probability of occurring the event A in condition of occurring the event B can be calculated by knowing the relation among the outcomes of the event A or the outcomes of the event B.

Introductory example: In an experiment of rolling a regular dice once, the sample space S is : $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, If the event $A = \{1, 2, 3\}$ is the event of the appearance of a number less then 4

It becomes clear that: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

If the event $B = \{2, 4, 6\}$ is the event of the appearance of an even number.

We ask: What is the probability of occurring the event A, if we know that the event B has already occurred?

In other words: what is the probability of getting an even number less than 4?

We notice that the given condition reduces the sample space into set $B = \{2, 4, 6\}$

Then, the event matching the appearance of an even number is $A \cap B = \{2\}$

And the probability required is: $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{6} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

This example shows us how the probabilities of some events differ in regard to the difference of the sample space.

Learn

Conditional Probability

If S is the sample space of a random experiment and A and B are two events of this sample space, then the probability of occurring the event A in condition of occurring the event B is denoted by the symbol P(A|B) and read as the probability of occurring the event A in condition of occurring the event B. it can be determined by the next relation:

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ where } P(B) > 0}$$

Notice that: the conditional probability has the same properties of the unconditional one.

1- $0 \leqslant P(A \mid B) \leqslant 1$

2- $P(S \mid B) = \frac{P(S \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

3- If $A_1 \cap A_2 = \phi$ then, $P[(A_1 \cup A_2) \mid B] = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B)$

Regard the following:

- $P(A \mid B) \neq P(B \mid A)$
- $P(A' \mid B) = 1 - P(A \mid B)$
- $P(A \cap B) = P(A \mid B) \times P(B)$ in a condition $P(B) > 0$
- $P(A \cap B) = P((B \mid A) \times P(A)$ in a condition $P(A) > 0$

Example — the conditional probability

1 A regular die has been rolled once. calculate the probability of appearing the number 2 known that the number appeared is even.

Solution

Let the sample space S= { 1, 2, 3, 4, 5, 6} , A = {2} , B = { 2 , 4, 6}

Then, $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{6}$

$\because P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$\therefore P(A \mid B) = \frac{1}{6} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{3}$

The probability of appearing the number 2 known that the number appeared is even is $\frac{1}{3}$

Notice

In the conditional probability, notice that the event after the phrase (What is the probability of) is the events which we start with and the event next to the phrases (known that A, if A, if known that a and so on) is the conditional event.

Try to solve:

1 A regular die has been rolled twice. What is the probability the number of points in the first roll is not more than 4 if you know that the absolute difference between the two number appeared equals 2?

Example — Doing the operations

2 If A and B are two events of the sample space where $P(A) = 0.45$, $P(B) = 0.6$, $P(B \mid A) = 0.8$ find:

a $P(A \cap B)$ **b** $P(A \cup B)$ **c** $P(A \mid B)$ **d** $P(B' \mid A)$

Solution

a $\because P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

$\therefore 0.8 = \frac{P(A \cap B)}{0.45}$ $\therefore P(A \cap B) = 0.8 \times 0.45 = 0.36$

b $\because P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\therefore P(A \cup B) = 0.45 + 0.6 - 0.36 = 0.69$

c $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.36}{0.6} = 0.6$

Notice that: $P(A \mid B) \neq P(B \mid A)$

d $P(B' \mid A) = \frac{P(B' \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A - B)}{P(A)}$

$= \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)}$

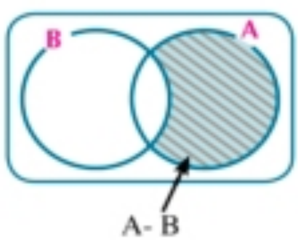
$= \frac{0.45 - 0.36}{0.45} = 0.2$

Remember

$P(B \cap A) = P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$



Try to solve

(2) If A and B are two events of the sample space of a random experiment S where $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.25$, $P(A - B) = 0.45$ find:

a $P(A \mid B)$

b $P(B \mid A)$

c $P(A' \mid B)$

d $P(A' \mid B')$

Example

Harmonic tables

(3) From the data in the next table:

Case	Number of people	
	Wear glasses	Do not wear glasses
Man	800	600
Woman	400	200

Find the probability of a woman wearing glasses has been randomly chosen

Solution

Let n(S)= Number of people under study=2000,

A is the event that the person chosen is a woman,

B is the event that the person chosen wears glasses.

$$P(A \cap B) = \frac{400}{2000} = \frac{1}{5}$$

$$P(B) = \frac{1200}{2000} = \frac{3}{5}$$

Required is to find the probability of A known that B has already occurred. i.e. $P(A \mid B)$

$$\because P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\therefore P(A \mid B) = \frac{1}{5} \div \frac{3}{5} = \frac{1}{3}$$

The probability of a woman wearing glasses has been randomly chosen is $\frac{1}{3}$

Try to solve

(3) In the previous example, find the probability that:

a A man does not wear glasses is randomly chosen.

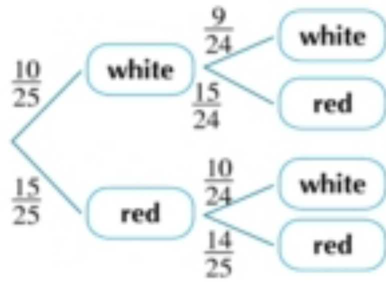
b A woman or man wearing glasses is randomly chosen.

Example — Tree diagram

(4) A bag contains 10 white balls and 15 red balls. Two balls have been consecutively drawn without replacing. What is the probability the two drawn balls are white?

Solution

In this example, we notice that drawing the balls has been conducted consecutively. As a result, it is subjected to the order. In other words, the second drawing is conditioned by the occurrence of the first drawing. This example can be represented by the tree diagram as shown in the figure opposite.



Let A denote the event that the first drawn ball is white and B denote the event that the second drawn ball is white.

Let (B | A) denotes the event of drawing the second ball in a condition the first ball has already been drawn .

and **let** (A ∩ B) denotes the event of drawing two white balls..

$$\because P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$\therefore \frac{9}{24} = \frac{(A \cap B)}{\frac{10}{25}}$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{9}{24} \times \frac{10}{25} = \frac{3}{20}$$

The probability the two drawn balls are white is $\frac{3}{20}$

Try to solve

(4) In the previous example, find the probability the two drawn balls are red.

Example — Education

(5) 100 learners are studying in a language institute. The number of learners studying English is 60, the number of the learners studying French is 50 and the number of the learners studying both languages is 35. If a learner has been randomly chosen from the institute, find the probability the learner studies:

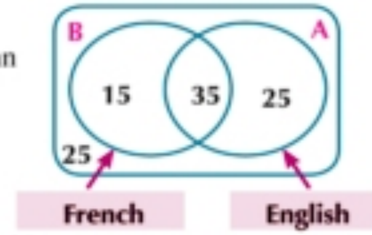
a a language at least.

b English if he (she) studies French.

c French if he (she) studies English.

Solution:

The data of this problem can be explained using the Venn diagram as shown in the figure opposite.



Let the following events be as follows:

The learner studies English = A

The learner studies French = B, then:

$P(A) = \frac{60}{100} = 0.6$, $P(B) = \frac{50}{100} = 0.5$, $P(A \cap B) = \frac{35}{100} = 0.35$

a The probability the learner studies a language at least is $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\therefore P(A \cup B) = 0.6 + 0.5 - 0.35 = 0.75$

I.e. the probability the learner studies a language at least is 0.75

b the probability the learner studies English if he (she) studies French = $P(A \mid B)$

$\because P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$\therefore P(A \mid B) = \frac{0.35}{0.5} = 0.7$

I.e. the probability the learner studies English if he (she) studies French is 0.7

c the probability the learner studies French if he (she) studies English = $P(B \mid A)$

$\because P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

$\therefore P(B \mid A) = \frac{0.35}{0.6} \simeq 0.583$

I.e. the probability the learner studies French if he (she) studies English is 0.583 approximately.

Try to solve

(5) Two players A and B shoot at the same time towards the goal. If the probability the player A scores a goal $= \frac{2}{5}$, the probability the player B scores a goal $= \frac{1}{4}$. and the probability both players A and B score together $= \frac{1}{10}$, Find the probability of:

a Scoring a goal.

b Scoring a goal by player A if player B scored a goal.

c Scoring a goal by player B if player A scored a goal.

Exercises 2 - 1

First: Choose the correct answer:

1. in an experiment for tossing a regular coin twice, the probability of appearing Tail in the second toss if Head appears in the first toss equals:
   a $\frac{1}{4}$ b $\frac{1}{2}$ c $\frac{3}{4}$ d 1

2. in an experiment for rolling a regular die once, the probability of appearing a prime even number greater than 1 is:
   a $\frac{1}{5}$ b $\frac{2}{5}$ c $\frac{3}{5}$ d $\frac{4}{5}$

3. in an experiment for rolling a regular die once, the probability of appearing the number 3 known that the appearing number is odd is:
   a $\frac{1}{4}$ b $\frac{1}{3}$ c $\frac{1}{2}$ d $\frac{3}{4}$

4. If $P(A \cap B) = \frac{2}{5}$, $P(A) = \frac{4}{5}$, then $P(B \mid A) =$
   a $\frac{1}{2}$ b $\frac{8}{25}$ c $\frac{1}{4}$ d $\frac{2}{5}$

5. If $P(A \mid B) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{12}{25}$ then $P(A \cap B) =$
   a $\frac{4}{25}$ b $\frac{1}{4}$ c $\frac{25}{36}$ d $\frac{16}{25}$

Second: Answer the following questions:

6. If A and B are two events of the sample space of a random experiment S where $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.7$, $P(A \mid B) = 0.3$ find:
   a $P(A \cap B)$ b $P(A \cup B)$ c $P(B \mid A)$ d $P(A \mid B')$

7. If $P(A') = 0.4$, $P(B) = 0.5$, $P(A \cup B) = 0.8$ find $P(A \mid B')$

8. If $P(B \mid A) = \frac{2}{3}$, $P(B \mid A') = \frac{4}{7}$, $P(A) = \frac{3}{5}$ find
   a $P(A \cap B)$ b $P(A \cup B)$

9. A die has been rolled once. Calculate the probability the appearing number is a prime number in a condition the appearing number is an odd number.

10. in an experiment of rolling two different dices once, find the probability:
    a the appearing number on the second die equals 4 known that the appearing number on the first die equals 2.
    b the sum of the two appearing numbers is even known that the appearing number on the first die equals 6.

11. If the probability of a student to succeed in an exam is 0.7 and the probability to travel abroad if he succeeded is 0.6. What is the probability of his success and traveling abroad?

12 A 45- student class; 27 students study French, 15 students study German and 9 students study both languages. A student is randomly chosen, calculate the probability the chosen student studies:

a a language at least.

b French if he (she) studies German.

c German if he (she) studies French.

13 two different dices have been rolled once, find the probability of the following events:

a the appearance of number 2 on the two faces together known that the same number appeared on both of them.

b the appearance of number 5 on the two faces together known that each of the appearing number is greater than 4.

c the non appearance of number 3 on any of the two faces known that the two numbers appeared are odd..

14 Spinning wheel: A spinning wheel has been divided into 8 equal circular sectors from 1 to 8. What is the probability the gage lands on the number 5 if known that it has previously landed on an odd number?

15 the next table illustrates the numbers of the sports teams participating in different games:

Sports game	Hand ball	Soccer	Volleyball	Basketball	Hockey ball
Numbers of participating teams	4	10	6	7	3

A game is randomly chosen. What is the probability the game is:

a Hockey ball known that it is not of Volleyball games?

b Basketball known that it is neither of soccer nor Hand ball?

16 a random sample made up of 30 male students and 20 female students to answer some questions related to economy and consuming the energy has been chosen and their answers have been as follows:

Answer	Yes	No	Uncertain	Total
Male students	20	6	4	30
Female students	15	3	2	20

A student is randomly chosen. What is the probability the student chosen is a female given that her answer is "Yes"?

17 A box contains 5 white balls and 7 black balls. If 2 balls have been consecutively drawn without replacing, find the probability::

a the second ball is white if the first one is white.

b the first ball is white and the second one is white.

c the second ball is black and the first one is white.

18 Karim and Ziad compete for the presidency of the student Union at their school in three classes, and the following table illustrates the votes obtained by each of them:

	First class	Second class	Third class	Total
Karim	196	174	130	500
Ziad	240	165	135	540

A student is randomly chosen. What is the probability the student chosen::

a voted for Karim known that the student is from the third class.

b voted for Ziad known that the student is from the second class.

19 A job has been announced for and 100 people have applied for this job. If their data have been ordered as follows::

Qualified			Unqualified		
	Married	Single		Married	Single
Male	40	10	Male	3	12
Female	10	10	Female	10	5

a calculate the probability the employee chosen is married in a condition he (she) is qualified.

b calculate the probability the employee chosen is married and qualified.

c calculate the probability the employee chosen is married in a condition he(she)is unqualified.

20 In the final year exam, 30% of the students have failed in chemistry, 20% have failed in physics and 15% have failed in both chemistry and physics. A student has been randomly chosen.

a what is the probability the student fails in physics if he (she) has already failed in chemistry?

b what is the probability the student fails in chemistry if he (she) has already failed in physics?

c find the probability the student fails in chemistry in a condition he (she) fails in physics.

d find the probability the student succeeds in physics in a condition he (she) succeeds in chemistry.

21 Activity: Use Venn diagram:

A and B are two events of the sample space S where $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.4$, $P(A \cap B) = 0.2$

a represent the previous sets using Venn diagram and write down the probability of these events to occur on the graph.

b find the probability of the following events:

First: the occurrence of event A in a condition event B do not occur.

Second: the occurrence of event B in a condition event A do not occur..

Independent Events

Unit Two
2 - 2

You will learn

- Independent events
- Dependent events

Key terms

- Independent Events
- Dependent Events

Think and discuss

Meditate the following examples

1- tossing a coin and rolling a die once.
2- a student has succeeded in mathematics and chemistry.
3- a ball has been randomly drawn from a box containing 10 balls, then it has been turned back to the box and another ball has been drawn.
4- a student has succeeded in the physics lab-exam and in physics.
5- a ball has been randomly drawn from a box containing 10 balls without turning it back, then another ball has been drawn.

What do you notice?

From the first three examples, we notice that:

1- the outcomes of the coin do not affect the outcomes of the dice .
2- the success or failure of the student in mathematics does not affect his (her) success or failure of the student in chemistry
3 - returning the first ball to the box after drawing it does not change the number of the balls, so the first draw does not affect the second one.

As a result, the events in each example of the first previous three examples are called the independent events.

4- the success of the student in the physics lab-exam affects the success in physics.
5- when a ball has been drawn from the box without returning to the box it affects the number of the balls in the box and so the first draw affects the second draw.

As a result, the events in examples (4) and (5) are called the dependent events.

Learn independent events

Definition **It is said that A and B are two independent events if and only if $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.**

I.e. the probability of occurring two independent events together equals the probability of occurring the first event multiplied by the probability of occurring the second event

Materials: Scientific calculator- computer graphs.

It is noticed that if the two events A and B are independent and $P(B) \neq 0$

then $P(A \mid B) = P(A)$ **I.e.** the occurrence of an event does not affect the occurrence of the other event.

For example: a regular coin has been tossed twice and the frequency of occurring the Tail and Head has been noticed , then: $S = \{ (H, H), (H, T), (T, H) , (T, T)\}$

So the probability of any of the outcomes $= \frac{1}{4}$

Let event A represent the appearance of tail in the second time $= \{(H , T) , (T , T) \}$

and event B represent the appearance of Head in the first time $= \{(H , H) , (H , T)\}$

then $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = P(A)$

I.e. the occurrence of event B does not affect the probability of occurring event A. In other words, the probability of event A does not depend on knowing that the event B is occurred or not. Thus, we say that the two events A and B are independent.

Notice that: The mutually exclusive events A and B are independent if and only if $P(A) \times P(B) = 0$ In other words, if and only if the probability of A or the probability of B equals zero.

Example

1. what is the probability of appearing Head and number 5 in an experiment of tossing a coin once, then rolling a dice?

Solution

The tree diagram can be used to write down the sample space. We notice that when the coin is tossed, it does not affect the sample outcomes of rolling the dice. This means that the two events are independent.

Let A event of appearing Head, then $P(A) = \frac{1}{2}$, B = event of appearing number 5, then $P(B) = \frac{1}{6}$

$\because P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ $\therefore P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

$\therefore$ The probability of appearing Head and number 5 is $\frac{1}{12}$

Note: The probability of appearing Head and number 5 can be found directly by writing down the sample space as shown in the figure opposite.

$S = \{ (H , 1) , (H , 2) , (H ,3) , (H , 4) , (H , 5) , (H , 6) , (T , 1) , (T, 2) , (T, 3) , (T , 4), (T , 5) , (T , 6) \}$

The event of appearing Head and number 5 $= \{(H , 5)\}$

and The probability of appearing Head and number 5 $= \frac{1}{12}$

Try to solve:

1. in the previous example, find the probability of appearing Tail and a prime number.

Example

(2) If A and B are two events of a sample space of a random experiment S and $P(A)=0.5$, $P(B)=0.6$ and $P(A \cup B) = 0.8$. Explain if A and B are two independent events.

Solution

$\because P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$\therefore P(A \cap B) = 0.5 + 0.6 - 0.8 = 0.3$ (1)

$\because P(A) \times P(B) = 0.5 \square 0.6 = 0.3$ (2)

From (1) and (2), A and B are two independent events.

Notice that: To show the difference between two mutually exclusive events and two independent events, we study the next example:

We know that when we toss a regular coin once, the sample space $S=\{H, T\}$

We also know that $P(H) = \frac{1}{2}$ and $P(T) = \frac{1}{2}$

Furthermore, we know that the two events H and T are two mutually exclusive events because the occurrence of an event negates the occurrence of other event.

$\therefore P(H \cap T) = \text{zero}$, $\therefore P(H \cap T) \neq P(H) \times P(T)$

I.e. H and T are two mutually exclusive events but they are dependent

Try to solve

(2) If A and B are two events of a sample space of a random experiment S where $S= \{1,2,3,4,5,6\}$ $A = \{2, 3, 5, 6\}$ and B $\{1, 4, 5, 6\}$. Are A and B two dependent events? Explain.

Example

(3) Insurance: a man and his wife have insured their life at a life insurance company. If the company has estimated the probability that the man will live more than 20 years to be 0.2 and the probability that his wife will live more than 20 years to be 0.3, find the probability that:

a) The man and his wife will live more than 20 years together.

b) At least one of them will live more than 20 years.

c) Only one of them will live more than 20 years.

Solution

Let A be the event that the man will live more than 20 years $\therefore P(A) = 0.2$,

B the event that the wife will live more than 20 years $\therefore P(B) = 0.3$

a) The probability that the man and his wife will live more than 20 years together $= P(A \cap B)$

$\because P(A \cap B) = P(A) \square P(B)$ $\therefore P(A \cap B) = 0.2 \times 0.3 = 0.06$

b) The probability that at least one of them will live more than 20 years $= P(A \cup B)$

$\because P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $\therefore P(A \cup B) = 0.2 + 0.3 - 0.06 = 0.44$

c The probability that only one of them will live more than 20 years = P (A ∪ B) - P (A ∩ B)

$\therefore P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0.44 - 0.06 = 0.38$

Try to solve

(3) Shooting: two soldiers A and B have shot a missile in the direction of a target. If the probability soldier A shot the target is 0.6 and the probability soldier B shot the same target is 0.5, find the probabilities of the following events:

a Shooting the target by soldier A and soldier B together.

b Shooting the target by a missile at least.

c Shooting the target by one missile only. **d** No one Shot the target.

Example

(4) Drawing with replacing: A bag contains 6 blue balls and 4 red balls. A ball is randomly drawn, then it is turned back to the bag, then another ball is drawn. What is the probability

a the two balls are red in the two times **b** the two balls are blue in the two times?

c the first ball is red and the second is blue? **d** one ball is red and the other is blue?

Solution

a As long as the process of drawing the ball is accompanied with replacing, the two events are **independent.**

Let S= Sample space, A= drawing the ball first time and B= drawing the ball second time.

$\therefore n(S) = 10$, $P(A) = \frac{4}{10}$. $P(B) = \frac{4}{10}$ **(since the drawing is with replacing)**

$\because P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ $\therefore P(A \cap B) = \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}$

Similarly:

b The probability the two balls are blue in the two times $= \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{36}{100} = \frac{9}{25}$

c The probability the first ball is red and the second is blue $= \frac{4}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}$

d The probability one ball is red and the other is blue = the probability the first ball is red and the second is blue + the probability the first ball is blue and the second is red

$$= \frac{4}{10} \times \frac{6}{10} + \frac{6}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{12}{25}$$

Try to solve

(4) The probability of rising the stock market index in a country (A) equals 0.84 and the probability of rising the stock market index in a country (B) equals 0.75. What is the probability the index of the two stock markets of the two countries A and B rises?

Learn Dependent events

A and B are two dependent events if: $\boxed{P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)}$

because we know from the conditional probability that:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B) \neq 0$$

$$, P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad P(A) \neq 0$$

I.e. it can be written as $P(A \cap B) = P(A \mid B) \times P(B)$

$= P(B \mid A) \times P(A) \qquad P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$

In other words, the two events A and B are dependent if the probability of the occurrence of one of them affects in a way the probability of the occurrence of the other event.

Probability of dependent events:

Example

(5) If S is the sample space of a random experiment where $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 2, 4, 8\}$ and $B = \{2, 5, 6, 7\}$. Are A and B two independent events? Explain.

Solution

$\because n(A) = 4 \qquad \therefore P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad , \quad \because n(B) = 4 \qquad \therefore P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$\because A \cap B = \{2\} \qquad \therefore P(A \cap B) = \frac{1}{8} \qquad$ (1)

$\because P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \qquad$ (2)

From (1) and (2), $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ so, A and B are two dependent events.

Try to solve:

(5) In the previous example If $C = \{2, 3, 4, 7\}$. Are B and C two independent events? Explain.

Drawing without replacing:

Example

(6) A bag contains 6 blue balls and 4 red balls. If two balls are drawn one after another without replacing. What is the probability:

a) the two balls are red? b) the two balls are blue?

c) the first ball is red and the second is blue?

Solution

This example is similar to example (3) but the difference is that drawing the balls is conducted without replacing. So, the two events are dependent.

a) if the two drawn balls are red, then

The probability the first drawn ball is red and the second is red =

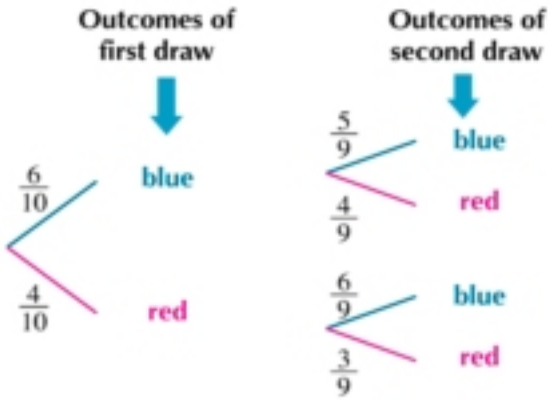
the probability the second drawn ball is red after drawing the first red ball × The probability the first drawn ball is red

$= \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$

b if the two drawn balls are blue, then: The probability the first drawn ball is blue and the second is blue = $\frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$

c The probability the first drawn ball is red and the second is blue =
The probability the first drawn ball is red × The probability the second drawn ball is blue in a condition the first drawn ball is red
$= \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{4}{15}$

The tree diagram can be used as shown in the figure opposite to find the outcomes of the dependent events.



Try to solve

(6) a bag contains 3 red balls and 5 black balls. Two balls are drawn one after another without replacing. What is the probability:

a the two balls are black?

b the first ball is black and the second is red?

c one of the two balls is red and the other is black?

Exercises 2 - 2

(1) which of the following events is independent and which is dependent?

a tossing a coin, then rolling a die once.

b a card is drawn from a bag without replacing, then another card is drawn from the same bag

c a ball is drawn from a bag with replacing, then another ball is drawn from the same bag.

d a football team reaches the semi-final match. If it wins, it will play the championship match.

e choosing a name by lot without replacing, then choosing another name.

f choosing a ball from a bag and placing it in another place, then choosing another ball from the Same bag.

g karem participated and succeeded in the cultural competition on Monday and participated and succeeded in the scientific competition on Thursday, too.

Choose the correct answer:

(2) If A and B are two independent events, $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.6$, then $P(A \cup B) =$

a 0.12 **b** 0.32 **c** 0.68 **d** 0.8

(3) If A and B are two independent events $P(A) = 0.25$, $P(B) = 0.4$, then $P(A - B) =$

a 0.1 **b** 0.15 **c** 0.3 **d** 0.65

(4) If A and B are two independent events $P(A) = 0.3$, $P(B) = x$, $P(A \cup B) = 0.72$ then x equals:

a 0.24 b 0.28 c 0.4 d 0.6

Answer the following questions:

(5) What is the probability of appearing Head and number 3 if a coin is tossed then a die is rolled once?

(6) What is the probability of getting Tail 4 times if a coin is tossed four consecutive times?

(7) A regular die is rolled once. And A is the event of appearing an even number and B is the event of appearing a squared number. Are A and B two independent events? Explain.

(8) If A and B are two events of a sample space of a random experiment and $P(B) = 0.3$, $P(A \cup B) = 0.5$ find the value of P(A) if a and b are:

a Two mutually exclusive events. b Two independent events .

(9) A bag contains a set of marbles distributed as follows: 2 red, 3 green and one blue. A marble is randomly chosen with replacing, then another marble is chosen. Find the probability the two marbles chosen are green.

(10) In the previous question, if a marble is randomly chosen without replacing, then another marble is chosen, find the probability the first marble chosen is blue and the second is green.

(11) A bag contains the following balls: 6 red, 4 orange, 3 yellow, 2 blue and 5 green. A ball is randomly chosen without replacing, then another ball is chosen.
Find the probability the balls chosen are:

a Red and blue. b Red and yellow. c Red and red. d Orange and blue.

(12) Two soldiers A and B have shot a bullet in the direction of a target. If the probability the first soldier shot the target is 0.4 and the probability the second soldier shot the same target is 0.7,
First: find the probabilities of the following events::

a The two soldier shot the target together. b At least one soldier shot the target.
c Only one soldier shot the target.. d At most one of them Shot the target.

Second: If you know that one soldier at least shot the target, find the probability the soldier A only shot the target.

(13) If A and B are two independent events, prove that all the following event pairs are also independent.

a A', B' b A', B c A, B'

Unit summary

1 *calculating the probability of an event (say A)*

P(A) (the probability of occurring even A) $= \dfrac{\textbf{the number of outcomes in event n(A)}}{\textbf{the number of outcomes in sample n(s)}}$

2 *Mutually exclusive events:* They are the two events which do not share in any element and their intersection is the null set ϕ.

If A and B are two mutually exclusive events, then $A \cap B = \phi$

$\therefore$ $P(A \cap B)$ =Zero and $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

3 *Events are not mutually exclusive:* They are the two events in which if an event occurs, it does not trap the occurrence of the other(there are common elements between them) then, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

4 *Conditional probability:* If S is the sample space of a random experiment and A and B are two events of this space, then, the probability of occurring the event A in condition of occurring the event B and it is denoted by the symbol P(A|B) and read as the probability of occurring event A in condition of occurring event B. it can be determined by the next relation:

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ where } P(B) > 0}$$

5 *the two independent events :* It is said that A and B are two independent events if and only if $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

i.e the probability of occurring two independent events together equals the probability of occurring the first event multiplied by the probability of occurring the second event.

It is noticed that if the two events A , B are independent and $P(B) \neq 0$

then $P(A \mid B) = P(A)$

i.e. the occurrence of an event doesn't affect the occurrence of the other event.

6 *Dependent events*

A and B are two dependent events if $\boxed{P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)}$

because we know from the conditional probability that:

$P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ In condition $P(B) \neq 0$,

$P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ In condition $P(A) \neq 0$

I.e. it can be written as: $P(A \cap B) = P(A \mid B) \times P(B)$

$= P(B \mid A) \times P(A)$ $\qquad P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$

In other words, the two events A and B are dependent if the probability of the occurrence of one of them affects in a way the probability of the occurrence of the other event.

General exercises

Choose the correct answer:

1. If A and B are two mutually exclusive events, $P(A)= 0.2$ and $P(B`)= 0.6$, then $P(A \cup B) =$
   a) 0.4　b) 0.6　c) 0.8　d) 1.2

2. If $A \subset B$, $P(A') = \frac{7}{10}$ and $P(B) = \frac{1}{2}$ then $P(A \mid B)$ equals:
   a) $\frac{1}{5}$　b) $\frac{3}{5}$　c) $\frac{4}{5}$　d) $\frac{3}{20}$

3. If A and B are two independent events, $P(A)= 0.2$ and $P(B)= 0.5$, then $P(A \cap B) =$
   a) 0.7　b) 0.4　c) 0.3　d) 0.1

4. If $S=\{A,B,C\}$ and A,B and C are mutually exclusive events where $P(A)= 0.25$ and $P(B)= 0.4$, then $P(C) =$
   a) 0.1　b) 0.15　c) 0.35　d) 0.65

5. If A and B are two independent events of S where $P(B)= 0.6$ and $P(A \cup B) = 0.68$, then $P(A) =$
   a) 0.2　b) 0.3　c) 0.4　d) 0.5

6. In an experiment to draw a ball randomly from a box containing 10 red balls numbered from 1 to 10 and 5 blue balls numbered by the odd numbers from 1 to 9. A ball has been randomly drawn from the box and it is found that the ball is red. What is the probability the ball drawn is numbered 9?

7. If 25% of the students at one of a school grade failed in the math exam and 10% failed in math and chemistry exams and a student has been randomly chosen. What is the probability the student chosen failed in chemistry if he (she) failed in math?

8. Family: A 3 -kid family. If A: is the event the family has male and female kids and B: is the event the family has one male kid at most. Are the two events A and B independent? Explain.

9. A regular die has been rolled once and the spinning wheel shown opposite has been spined, find the probabilities of appearing the following events:

   a) P(the number 3 then the green sector)
   b) P(a prime number then the blue sector
   c) P(the number 5 then the yellow sector
   d) P(an even number then the green sector)

10. If A and B are two mutually exclusive events from a sample space of a random experiment where:
    $P(A - B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$, Find: $P(A)$, $P(B)$, $P(A' \cup B')$

11. a regular die has been rolled two consecutive times, find the probability:
    a) Appearing the number 5 on one face known that the same number appeared on both faces.
    b) Appearing the number 4 on one face known that the two number appeared on the two faces each is greater than 3.
    c) Non-appearing the number 3 on any of the two faces known that the two numbers appeared are odd.

12 In a competition, a question has been given to the two competitors A and B. if the probability the competitor A answer the question is 0.6 and the probability the competitor B answer the same question is 0.8, find the following probabilities:

a A and B answer the question together

b one of them answer the question at least.

c no one answer the question.

13 A bag contains 26 cards; 10 red and 16 green, two cards have been randomly chosen one after another without replacing. What is the probability:

a the two cards are red?

b the two cards are green?

c the first card is red and the second is green?

d the first card is green and the second is red?

14 A competition has been conducted to form two teams of the students where cards are randomly drawn out of 9 cards numbered from 1 to 9. If:

Team A= The students who draw the odd numbered cards

Team B= The students who draw the even numbered cards.

a what is the probability the student draws number 7 if he (she) is from team A?

b what is the probability the student draws number 4 if he (she) is from team B?

15 the next table shows the distribution of 50 people in respect to smoking and the diseases related.

b \ a	Sick	Not sick
Smoker	30	10
Nonsmoker	2	8

If a person is randomly chosen from these people, find each of the following:

a the probability this person is sick.

b the probability this person is sick in a condition he (she) is smoker.

c the probability this person is sick in a condition he (she) is nonsmoker.

16 the next table shows the distribution of 10 people:

	Students	Employee
Athlete	4	1
Not athlete	3	2

If two persons are randomly chosen, find the probability one of them is athlete and the other is not athlete.

a if the choice is done with replacing.

b if the choice is done without replacing.

For more activities and exercises, visit www.sec3mathematics.com.eg

Accumulative test

Short-answered questions:

First: complete the following:

1. The probability of occurring the impossible event = ...
2. When a die is rolled once, the probability the number 3 appears on the upper face = ...
3. If a digit of the number 37450 is randomly chosen, the probability the number chosen is even = ...
4. The value for the correlation coefficient if the correlation is perfect direct = ...

Second: choose the correct answer:

5. when a regular die is rolled once and observing the upper face, the probability of appearing a number greater than or equal 6 equals:

   a Zero   b $\frac{1}{6}$ c $\frac{5}{6}$ d 1

6. A basket contains 48 balls of the same type; some are white, some others are red and the rest are green. If the probability of drawing a red ball equals $\frac{5}{8}$, then the number of the red balls in the basket equals:

   a 24   b 30   c 32   d 36

7. The weakest correlation coefficient of the following is::

   a -0.9   b -0.5   c 0.1   d 0.4

Long-answered questions:

8. Calculate Spearman's correlation coefficient from the next table:

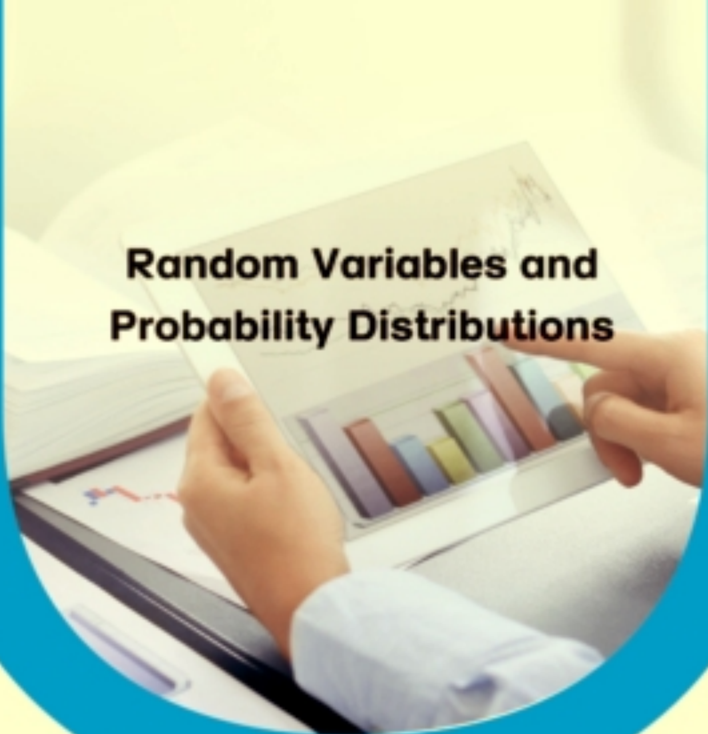
Math marks	Excellent	Good	Very good	Pass	Very good	Pass	good
Physics marks	Weak	Very good	Pass	Very good	Pass	Very good	good

9. In an international conference of 150 members, it is found that 100 members speak English, 60 members speak French and 20 members speak both English and French. A member is randomly chosen, find the probability the member chosen:
   - a Speaks one language of both at least.
   - b Speaks English if he (she) speaks French.
   - c Speaks French if he (she) speaks English

10. A bag contains 12 yellow balls, 8 red balls and two balls are drawn one after another without replacing. What is the probability:
    - a The two balls are yellow?
    - b The first ball is yellow and the second is red?
    - c The two balls are red?

Unit 3

Random Variables and Probability Distributions



introduction

You have previously learned the random experience and some probability concepts.

You sometimes like to deal with numerical values related to the results of the random experience which may be characteristics that are mathematically difficult to deal with. In such a case, we convert these descriptive values into real numerical values called a random variable, which is used to express the results of the random experience.

In this unit, we are going to learn two types of random variables which are:

- Discrete Random Variables
- Continuous Random Variables

Furthermore, we will learn the probability distribution functions of the random variables which are divided into:

- Probability distribution function of discrete random variable.
- Probability density function.

Unit objectives

By the end of the unit and carrying the involved activities, the students should be able to:

- Identify the concept of the random variable and distinguish the discrete random variable and the continuous one.
- Identify the probability density function of a continuous random variable and use it to calculate the probability of occurring the value of the random variable within a certain interval.
- Identify the concept of the mean (expectation) and variance.
- Deduce the standard deviation of a random variable.
- Identify the coefficient of variation
- Identify the continuous distributions.

Key Terms

- Random Variable
- Discrete Random Variable
- Probability Distributions
- Expectation(Mean)
- Variance
- Coefficient of Variation
- Probability Density

Lessons of the unit

Lesson (1 - 1): Discrete random variable.

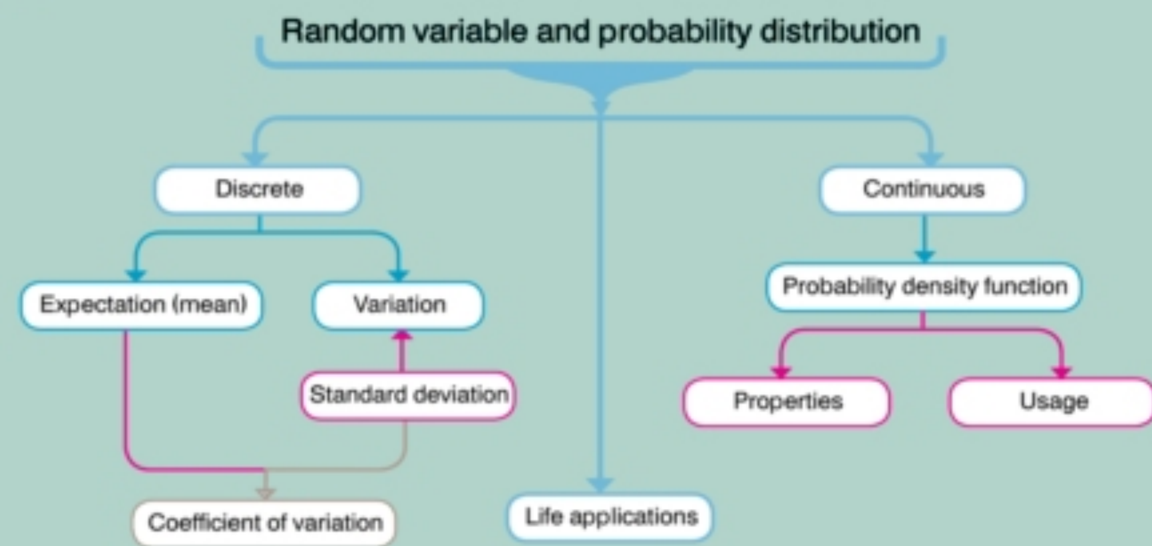
Lesson (1 - 2): Expectation (mean) and variance of the discrete random variable.

Lesson (1 - 3): The probability density function of the continuous random variable

Materials

Scientific Calculator

Unit planning organizer



Unit Three

3 - 1 Discrete random variable

You will learn

- Random variable
- Discrete random variable
- Continuous random variable
- Probability distribution

Key terms

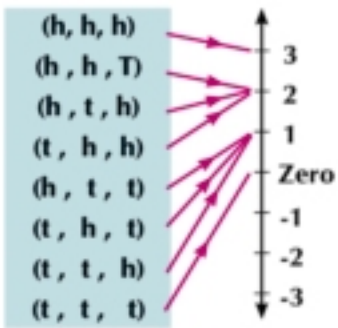
- Random Variable
- Discrete Random Variable
- Continuous Random Variable
- Probability Distributions

Introduction: : you have learned the random experiment and found the sample space for this experiment . In this lesson, you will identify a new variable related to such an experiment - The random variable .

You will learn in this lesson how to describe the items of two different phenomena with respect to the relation between them.

Random variable:

In an experiment for tossing a coin three consecutive times, the sample spaces S can be identified as shown in the opposite figure. If you are asked to find " the number of images" which appear in the sample space S, you draw a diagram to show the relation between S (as an independent variable) and the number of the image which is real number R (as a dependent variable). This relation expresses a function and can be symbolically written as : X: S → R where X is denoted the random variable .



Definition

The random variable is a function whose domain is the set of the elements of the sample space S and Co-domain is the set of real numbers R.

Remember

The function is defined by:

- **Domain**
- **Co-domain**
- **Base of the function**

The function range is the set of the images of the domain elements in the co-domain.

Then, the random variable range X in the previous example = {0 , 1 , 2 , 3 }

Note: The random variable divides the sample space S into mutual exclusive events; each event is linked with a real number , this link expresses a function X from the sample space S to the set of the real number R.

Discrete Random Variable

Definition

The range of the discrete random variable is a finite set (i.e. it can be counted) of the real numbers.

Materials

- Scientific Calculator , Computer graphics.

For examples :

- the number of stocks specialized for an individual in an underwriting of a joint-stock company.
- The number of car accidents on a high way within a week.
- The number of the outcoming telephone calls for a family within a month.

Example **Discrete random variable**

(1) In an experiment for tossing a coin three consecutive times , If the random variable X expresses " number of heads - number of tails" , write down the random variable range.

Solution

S = { (H , H , H) , (H , H , T) , (H , T , H) , (H , T , T) , (T , H , H) ,
(T , H , T) , (T , T , H) , (T , T , T) }

Sample space S	X: number of tails – number of heads
(H , H , H)	3 – 0 = 3
(H , H , T)	2 – 1 = 1
(H , T , H)	2 – 1 = 1
(H , T , T)	1 – 2 = - 1
(T , H , H)	2 – 1 = 1
(T , H , T)	1 – 2 = - 1
(T , T , H)	1 – 2 = - 1
(T , T ,T)	0 – 3 = - 3

The random variable range = {- 3 , - 1 , 1 , 3 }

Try to solve

(1) in the previous example, find the random variable range expressing : number of heads × number of tails.

Example **Discrete random variable**

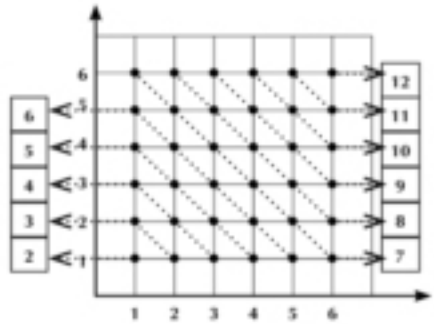
(2) A regular die has been tossed two consecutive times . Find the random variable expressing the sum of the two shown numbers .

Solution

Sample space S	x: sum of the two numbers
(1 , 1)	2
(1 , 2) , (2 , 1)	3
(3 , 1), (2 , 2), (1 , 3)	4
(4 , 1) , (3 , 2) , (2 , 3) , (1 , 4)	5
(5 , 1), (4 , 2), (3 , 3), (2 , 4), (1. 5)	6

Sample space S	x: sum of the two numbers
(4 , 3) ,(3 , 4) ,(2 , 5) ,(1 , 6), (6 , 1) , (5 , 2)	7
(6 , 2), (5 , 3), (4 , 4), (3 , 5), (2 , 6)	8
(6 , 3), (5 , 4), (4 , 5), (3 , 6)	9
(6 , 4) , (5 , 5) , (4 , 6)	10
(6 , 5) , (5 , 6)	11
(6 , 6)	12

From the previous table , the random variable range is
$x = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
we can use the lateral shape to find the random variable range x .



Try to solve

(2) In the previous example, find the random variable range expressing : (the greater of the two shown numbers).

Probability distribution

Probability Distribution Function of Discrete Random Variable

Definition

If x is a discrete random variable whose range is the set:$\{x_1, x_2, x_3, ..., x_r\}$ then the function f defined as follows: $f(x_r) = P(X = x_r)$ for each $r = 1, 2, 3, ...$
Identifies what is called the probability distribution function of the discrete random variable X which is expressed by a set of ordered pairs specifying the function F.

i.e. the probability distribution of the random variable $X = \{(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3)), ..., (x_n, f(x_n))\}$

Note : the probability distribution of the random variable x can be written in the form of the following table:

x_r	x_1	x_2	x_3	......	x_n
$f(x_r)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	......	$f(x_n)$

You can notice that the function f in the previous definition satisfies the following two conditions:

1- $f(x_r) \geqslant 0$ for each $r = 1, 2, 3, ..., n$

2- $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + ... + f(x_r) = 1$

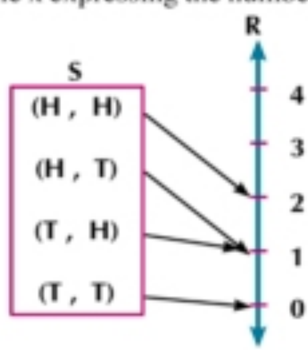
Example probability distribution function

(3) A coin has been tossed three consecutive times and the upper face has been seen. Write down the probability distribution function of the discrete random variable x expressing the number of appearing the head face.

Solution

$S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$

From the lateral shape , we find that the random variable range expressing the number of appearing the head = $\{0, 1, 2\}$



$f(0) = p(X = 0) = \frac{n(x_1)}{n(s)} = \frac{1}{4}$

$f(1) = p(X = 1) = \frac{n(x_2)}{n(s)} = \frac{2}{4}$, $f(2) = p(X = 2) = \frac{n(x_3)}{n(s)} = \frac{1}{4}$

The probability distribution function is:

x_r	0	1	2
$f(x_r)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

Try to solve

(3) In the previous example, write down the probability distribution function of the discrete random variable x expressing:(number of appearance of head - number of appearance of tail).

Example **Drawing without replacing**

(4) A box contains 5 identical cards numbered from 1 to 5. Two cards have been drawn one after another without replacing , find the probability distribution function for the random variable expressing the least number of the two numbers on the two drawn cards..

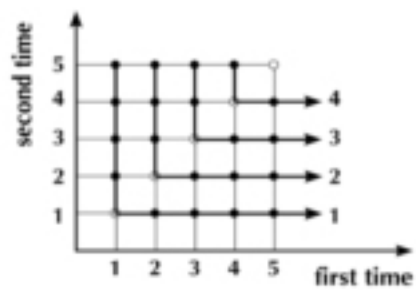
Solution

As long as the cards have been drawn without replacing to the box, the cards drawn is not repeated more, in other words, the pairs of cards carrying the digits (1 , 1) , (2 , 2) , (3 , 3) , (4 , 4) , (5 , 5) are not included in the sample space as shown in the opposite figure.

$n(s) = 20$

From the figure opposite, the range of random variable x is:

$x = \{ 1 , 2 , 3 , 4 \}$ and:



$f(1) = p(X = 1) = \frac{8}{20}$

$f(2) = p(X = 2) = \frac{6}{20}$

$f(3) = p(X = 3) = \frac{4}{20}$

$f(4) = p(X = 4) = \frac{2}{20}$

the probability distribution function of the discrete random variable x is given as shown in the following table :

x_r	1	2	3	4
$f(x_r)$	$\frac{8}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{2}{20}$

Try to solve

(4) In an experiment of rolling a regular die two consecutive times and observing the seen face in each time, find the probability distribution function of the discrete random variable expressing the greatest number of the two numbers appeared on the two upper faces.

Example: Using the rule (base) of the function

(5) If X is a discrete random variable and its probability distribution function is determined by the relation :

$f(x) = \frac{k + 2x}{24}$ where $x = 0, 1, 2, 3$ find the value of k, then write down the probability distribution function.

Solution

$\because f(0) = p(X = 0) = \frac{k}{24}$, $f(1) = p(x = 1) = \frac{k+2}{24}$,

$f(2) = p(X = 2) = \frac{k+4}{24}$, $f(3) = p(x = 3) = \frac{k+6}{24}$

$\because p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) = 1$

$\therefore \frac{k}{24} + \frac{k+2}{24} + \frac{k+4}{24} + \frac{k+6}{24} = 1$

$\therefore \frac{k + k + 2 + k + 4 + k + 6}{24} = 1$ $\therefore 4k + 12 = 24$

$\therefore 4k = 24 - 12$ $\therefore 4k = 12$ $\therefore k = 3$

To find the probability distribution function , you should find:

$p(X = 0) = \frac{k}{24} = \frac{3}{24}$, $p(X = 1) = \frac{k+2}{24} = \frac{5}{24}$

$p(X = 2) = \frac{k+4}{24} = \frac{7}{24}$, $p(X = 3) = \frac{k+6}{24} = \frac{9}{24}$

$\therefore$ The probability distribution function is:

x_r	0	1	2	3
$f(x_r)$	$\frac{3}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{9}{24}$

Try to solve

(5) If X is a discrete random variable whose range = { 1 , 2 , 3 } and its probability distribution function is determined by the relation $f(x) = \frac{ax}{9}$. Find the value of a , then write down the probability distribution function.

Exercises 3 - 1

First : choose the correct answer:

1. Which function of the following represents a probability distribution function of the discrete random variable X:

a

x_r	1	2	3	4
$f(x_r)$	0.06	0.15	0.42	0.26

b

x_r	0	1	3	5
$f(x_r)$	0.5	0.3	0.4	-0.2

c

x_r	-2	-1	1	2
$f(x_r)$	0.32	0.14	0.23	0.31

d

x_r	3	4	5	6
$f(x_r)$	0.23	0.32	0.17	0.18

2. If X is a random variable whose range is {0, 1, 2} then all the following functions do not represent its probability distribution function except :

a $f(x) = \frac{x^2 + 1}{8}$ b $f(x) = \frac{2x + 1}{3}$ c $f(x) = \frac{1}{x + 2}$ d $f(x) = \frac{3x - 1}{6}$

3. If X is a random variable whose range is {1 , 2 , 3}, $p(x = 1) = 0.3$ and $p(X = 2) = 0.5$ then $p(X = 3)$ is equal:

a 0.1 b 0.2 c 0.7 d 0.8

4. If x is a random variable whose range is {1 , 2 , - 1 , 0 }, $p(X = -1) = 0.2$ and $p(X = 0) = 0.4$, $p(X = 1) = 0.1$ then $p(X > 1)$ equal :

a 0.3 b 0.4 c 0.5 d 0.6

5. in an experiment for tossing a coin three consecutive times and X is the discrete random variable expressing (number of heads - number of tails) , then the range of X is :

a {1 , 3} b {0 , 1 , 3} c { 0 , 1 , 2 , 3} d {-3 , -1 , 1 , 3}

6. If X is a discrete random variable whose range = { 0, 1, 2} and its probability distribution function is determined by the relation $f(x) = \frac{ax}{6}$ then the value of a is equal:

a $\frac{1}{2}$ b 1 c $\frac{3}{2}$ d 2

Second : Answer the following questions:

7. The two following tables show the probability distribution of a discrete random variable x. Find the value of a in each table:

a

x_r	1	2	3
$f(x_r)$	a	2a	3a

b

x_r	-2	-1	0	1	2
$f(x_r)$	a	0.2	0.3	3a	a

c

x_r	0	1	3	4
$f(x_r)$	a	$2a^2$	$3a^2$	3a

8. If X is a discrete random variable whose range = { 0 , 1 , 2 , 3 } and the values of $p(X = 0) = 0.2$, $p(X = 1) = 0.33$ and $p(X = 2) = 0.37$ find the probability distribution of the discrete random value X.

9. If the values of the discrete random variable X in a random experiment are: -2 , 0 , 2 , 4 with probabilities of $\frac{m}{5}$, $\frac{m+1}{5}$, $\frac{2m-1}{5}$ and $\frac{3m-2}{5}$ respectively , find the value of m , then write down the probability distribution function of the variable X.

10. If X is a discrete random variable whose probability distribution function is determined by the relation : $f(x) = \frac{2a + 3x}{54}$ and the range of $x = \{1, 2, 3, 4\}$find the value of a and write down the probability distribution function of the variable X.

11. If X is a discrete random variable whose probability distribution is determined by the function $f(x) = \frac{k + 3x}{50}$ where x = 1 , 2 , 3. 4, find the value of K, then write down the probability distribution of the variable X.

12. In an experiment for tossing a coin three consecutive times, if the discrete random variable X expresses " number of heads- number of tails" , write down the probability distribution of the variable X.

13. Two boxes each contains three numbered balls from 3 to 5. A ball has been randomly drawn from each box and the discrete random variable x is defined as " the sum of two numbers" existed on the two drawn balls. Find the probability distribution of the discrete random variable X.

14. In an experiment for tossing a die two consecutive times and observing the number on the upper face in each time , write down the probability distribution of the discrete random variable X expressing " the least number of the two observed numbers".

15. A box contains 4 balls numbered from 1 to 4, two balls have been drawn one after another (with replacing), write down the probability distribution of the discrete random variable x expressing " the mean of the two numbers on the two drawn balls".

16. If X is a discrete random variable expressing the number of girls in a three- kid family, write down the range of the discrete random variable X . If we suppose that the probability of giving a birth of a boy is equal to the probability of giving a birth of a girl and disregarding having twins, find the probability distribution of the random variable X (the order of boys and girls is taken into acount)

Expectation (mean) and Variance of a Discrete Random Variable

Unit Three

3 - 2

You will learn

- Expectation (Mean)
- Variance
- Standard deviation
- Coefficient of variation

Key terms

- Expectation (Mean)
- Variance
- Coefficient of Variation

Introduction : To identify the characteristics of the probability distribution (identifying the characteristics of the original community or comparing different communities) , the basic features are necessarily needed to measure its mean value which the possible values of the discrete random value accumulate around it and is called expectation (mean), There are also other values measuring the dispersion of the discrete random variable values from the value of the mean and is known as variance, Therefore, expectation and variance summarize the most important characteristics of the discrete random variable.

Expectation (Mean)

Expectation is the value at which the most values of the discrete random variable are centralized and sometimes is called " mean" and is denoted by the symbol (μ) and read as (Mu).

If X is a discrete random variable whose probability distribution function is f and its range is: $\{ x_1 , x_2 , x_3 , ... , x_n\}$ by probabilities of $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, ... , $f(x_n)$ respectively, then the expectation is given by the relation:

$$\text{Expectation } (\mu) = \sum_{r=1}^{n} x_r \times f(x_r)$$

i.e.: Expectation (μ) $= x_1 \times f(x_1) + x_2 \times f(x_2) + x_3 \square f(x_3) + ... + x_n \square f(x_n)$

Example

1. If x is a discrete random variable whose probability distribution is shown in the below table:

x_r	-1	0	1	2	3
$f(x_r)$	0.3	0.1	0.1	a	0.2

First : Find the value of a **Second :** Find the expectation (Mean)

Solution

First : you know that the sum of probabilities is equal one

$\because p(X = -1) + p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) = 1$

$\therefore 0.3 + 0.1 + 0.1 + \mathbf{a} + 0.2 = 1$

$\therefore \mathbf{a} + 0.7 = 1$ $\qquad \therefore \mathbf{a} = 1 - 0.7 = 0.3$

Materials

- Scientific calculator - Computer graph programs.

Second :

$\because$ Expectation $(\mu) = \sum_{r=1}^{n} x_r \times f(x_r) = -1 \times 0.3 + 0 \times 0.1 + 1 \times 0.1 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.2$
$= -0.3 + 0 + 0.1 + 0.6 + 0.6 = 1$

Try to solve

(1) If X is a discrete random variable whose range = {0 , 1 , 2 , 3 , 4} ,
$p(X = 0) = p(X = 4) = \frac{1}{16}$, $p(X = 1) = p(X = 3) = \frac{1}{4}$
Find: **first:** $p(X = 2)$ **second:** Expectation

Example

(2) If x is a discrete random variable whose probability distribution is shown as follows:

x_r	0	1	2	b	6
$f(x_r)$	0.1	0.1	0.3	a	0.3

Find the value of a and b if the expectation $\mu = 3.5$

Solution

From the properties of the probability distribution: $f(0) + f(1) + f(2) + f(b) + f(6) = 1$

$\therefore 0.1 + 0.1 + 0.3 + \mathbf{a} + 0.3 = 1$ $\therefore \mathbf{a} = 1 - 0.8$ $\mathbf{a = 0.2}$

$\because$ expectation $(\mu) = \sum_{r=1}^{n} x_r \square f(x_r) = 3.5$

$\therefore 0 \times 0.1 + 1 \times 0.1 + 2 \times 0.3 + b \times 0.2 + 6 \times 0.3 = 3.5$

$\therefore 0 + 0.1 + 0.6 + 0.2\,b + 1.8 = 3.5$ $\therefore 0.2\,b = 3.5 - 2.5$

$\therefore b = 1 \div 0.2 = 5$ $\mathbf{b = 5}$

Try to solve

(2) If X is a discrete random variable whose probability distribution is shown as follows:

x_r	0	2	3	4
$f(x_r)$	$\frac{3}{16}$	2 p	$\frac{1}{16}$	p

First : find the value of p. **Second :** find the expectation

Variance

The variance of a discrete random variable measures the amount of dispersion of the discrete random variable of its expected value and is denoted by the symbol (σ^2) and read as (sigma squared) and is given by the relation:

$$\sigma^2 = \sum_{r=1}^{n} x^2_r \square f(x_r) - \mu^2$$

Note: The standard deviation of a discrete random variable x is the square root of the variance and is denoted by the symbol σ . It's noticed that the variance and the standard deviation are always positive quantities .

Example

(3) If X is a discrete random variable whose probability distribution function is $f(x) = \frac{x+4}{16}$ where x = -2 , m , 1 , 2 find the value of m, then find the mean and the variance of the discrete random variable X.

Solution

From the properties of the probability distribution:

$\because p(X = -2) + p(X = m) + p(X = 1) + p(X = 2) = 1$

$\therefore \frac{2}{16} + \frac{m+4}{16} + \frac{5}{16} + \frac{6}{16} = 1$

$\therefore \frac{17+m}{16} = 1$ $\therefore 17 + m = 16$ $\therefore m = -1$

x_r	$f(x_r)$	$x_r \cdot f(x_r)$	$x^2_r \cdot f(x_r)$
-2	$\frac{2}{16}$	$\frac{-4}{16}$	$\frac{8}{16}$
-1	$\frac{3}{16}$	$\frac{-3}{16}$	$\frac{3}{16}$
1	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$
2	$\frac{6}{16}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{24}{16}$
		$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{2}$

The expectation $(\mu) = \sum_{r=1}^{n} x_r \square f(x_r) = \frac{5}{8}$

The variance $(\sigma^2) = \sum_{r=1}^{n} x_r^2 \square\, f(x_r) - \mu^2 = \frac{5}{2} - (\frac{5}{8})^2 = \frac{135}{64}$

Try to solve

(3) If X is a discrete random variable whose probability distribution is defined by the function where find $f(x) = \frac{a}{x+1}$ where x = 0 , 1 , 2 , 3 find:

First: the value of a

Second: The expectation and the standard deviation of the discrete random variable x.

Coefficient of Variation

As you were learning the standard deviation as a measure for the dispersion of the values of the discrete random variable of its expectation, you knew that it is measured by the same measuring units of the variable investigated whether these units are in degrees, meters or kilograms... i.e. it is proper to compare two sets of the same measuring units and the same means. If the measuring units or means are different between the two sets, the standard deviation is no longer proper to be used as a measure for the comparison, As a result, the need of a relative measure for dispersion can help us get rid of such different units. The coefficient of variation represents a proper solution to such a problem.

The coefficient of variation for any set of items is known as the percentage between the standard deviation of the set and its expectation (mean) and it can be defined as in the following relation :

$$\textbf{Coefficient of variation} = \frac{\textbf{standard deviation}}{\textbf{mean}} \times 100\ \% = \frac{\sigma}{\mu} \times 100\%$$

This coefficient forms the dispersion of the set in the form of a percentage abstracted from distinction where the measured units are not affected by the phenomenon.

Example

(4) If the expectation and the standard deviation for the marks of a group of students in history and Geography are as follows , known that the full mark is 100 marks.

Subject	history exam	geography exam
Expectation	70	96
Standard deviation	7	8

Find the coefficient of variation for each subject - What do you notice?

Solution

$\because$ Coefficient of variation $= \frac{\text{standard deviation}}{\text{mean}} \times 100\ \%$

$\therefore$ The coefficient of variation of history $= \frac{7}{70} \times 100\ \% = 10\ \%$.

The coefficient of variation of geography $= \frac{8}{96} \times 100\ \% \simeq 8.3\ \%$

From the Solution: we observe that the relative dispersion of the history exam is greater than of geography. This means the geography exam is more homogeneous than the history exam.

Try to solve

(4) If a factory produces two types of electric lamps A, B and their average of use is 1850, 1580 hours and the standard deviation of both is 250, 230 respectively, find the coefficient of variation of each type. What do you notice.

Example

(5) A box contains 6 cards; 2 cards carry the number two, 3 cards carry the number 3 and a card carries the number 11, if a card has been randomly drawn and the discrete random variable X is defined as " the appeared number on the drawn card"

Find:

a The probability distribution function of the variable X.

b Expectation and standard deviation of the variable X **c** the coefficient of variation.

Solution

a X takes the values 2 , 3 , 11 where: $f(2) = p(X = 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$f(3) = p(X = 3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $f(11) = p(X = 11) = \frac{1}{6}$

the table below illustrated the probability distribution function of the discrete random variable x.

x_r	2	3	11
$f(x_r)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

To calculate the expectation and the standard deviation, you ought to form the table below:

x_r	$f(x_r)$	$x_r \cdot f(x_r)$	$x^2_r \cdot f(x_r)$
2	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{8}{6}$
3	$\frac{3}{6}$	$\frac{9}{6}$	$\frac{27}{6}$
11	$\frac{1}{6}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{121}{6}$
Total		4	26

b Expectation $(\mu) = \sum_{r=1}^{n} x_r \times f(x_r) = 4$

Variance $(\sigma^2) = \sum_{r=1}^{n} x^2 f(x_r) - \mu^2 = 26 - (4)^2 = 10$

standard deviation $\sigma = \sqrt{10} = 3.16$

c $\because$ Coefficient of variation $= \frac{\text{standard deviation}}{\text{mean}} \times 100\ \%$

$\therefore$ Coefficient of variation $= \frac{3.16}{4} \times 100\ \% = 79\ \%$

Try to solve

5) A box contains 10 cards ; a card carries the number 1 , two cards each carries the number 2, 3 cards each carries the number 3, 4 cards each carries the number 4. If a card is randomly drawn and the discrete random variable X expresses the number on the drawn card, find the probability distribution function of this variable and calculate each of the expectation , its standard deviation and the coefficient of variation.

Exercises 3 - 2

First : Choose the correct answer:

(1) If the probability distribution of the discrete random variable X is {(0 , 0.25) , (1 , 0.5) , (2 , 0.25) } then its expectation equals:

(a) 0.5 (b) 1 (c) 1.25 (d) 1.5

(2) If x is a discrete random variable and the expectation equals 0.6 , $\sum_{r=1}^{n} x_r^2 \square f(x_r) = 4.36$ then its standard deviation equals:

(a) 1.94 (b) 2 (c) 3.76 (d) 4

(3) If x is a discrete random variable and the expectation equals 0.4 , $\sum_{r=1}^{n} x_r^2 \square f(x_r) = 6.16$ then its variance equals :

(a) 2.4 (b) 5.76 (c) 6 (d) 6.56

Second : Find the expectation and the standard deviation for the probability distribution for each of the following:

(4)

x_r	2	3	9
$f(x_r)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

(5)

x_r	−5	−4	1	2
$f(x_r)$	$\frac{1}{24}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$

(6)

x_r	−3	−1	0	1	2	3
$f(x_r)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

Third : Answer the following questions:

(7) If X is a discrete random variable whose probability distribution is shown in the table below:

x_r	1	2	4	6
$f(x_r)$	0.2	0.3	a	0.1

First : find the value of a. Second : find the mean and the standard deviation

(8) If the range of the discrete random variable X is { 1 , 2 , 3 , 4 }, $p(X = 1) = \frac{4}{25}$, $p(X = 2) = \frac{7}{25}$ and $p(X = 4) = \frac{1}{5}$, find the expectation and variance of X .

(9) If X is a discrete random variable whose range { 0 , 1 , 2 , 3 , 4 } , $p(X = 0) = p(X = 4) = \frac{1}{16}$ and $p(X = 1) = p(X = 3) = \frac{1}{4}$ Find: first : p (X : 2) second: the mean and the variance of the variable X .

(10) If X is a discrete random variable whose probability distribution function is shown in the table below where $0 < h < 1$

x_r	−3	zero	3	6
$f(x_r)$	h	h^2	$2h^2$	h

Find:

a the value of h

b The probability distribution of the variable X.

c The mean and variance of the variable X

(11) If x is a discrete random variable whose probability distribution is shown in the table below:

x_r	1	2	4	a
$f(x_r)$	0.2	0.3	0.4	0.1

Calculate the value of a if the expectation $\mu = 3$, then find the standard variation of the discrete random variable X .

(12) If the probability distribution of a discrete random variable X is defined by the function f where : $f(x) = \frac{a\,x}{9}$, where x = 1, 2, 3 . find:

a the value of a **b** calculate the expectation and the variance of the variable X.

(13) If X is a discrete random variable whose probability distribution is defined by the function: $f(x) = \frac{x^2 + 1}{a}$ where x = 0, 1 , 2 , 3 find: **a** the value of a **b** calculate the coefficient of variation of the variable x.

(14) If X is a discrete random variable whose probability distribution is defined by the function: $f(x) = \frac{x + 4}{16}$ where x = - 2, m, 1, 2 find: **a** the value of m **b** the mean and variance of the variable x.

(15) If x is a discrete random variable whose probability distribution is defined by the function f where: $f(x) = \frac{a}{x + 3}$, x = 0 , 1 , 2 , 3

a find the value of a **b** the expectation and variance.

(16) If the range of the discrete random variable X is { -1 , 0 , 2 } , $p(X = -1) = \frac{1}{4}$ and the expectation equals 1 , find:

a p(X = 0) , p (X = 2) **b** The coefficient of variation.

(17) If x is a discrete random variable whose mean $\mu = 3$ and its probability distribution is as follows :

x_r	0	2	k	4
$f(x_r)$	1	2a	$\frac{1}{4}$	5a

a Calculate the values of a and k

b Find the standard deviation of the variable X.

3 - 3 Probability density function of the continuous random variable

You will learn

- Probability density function

Key terms

- *Probability Density*

Continuous Random Variable

Definition

The continuous random variable : its range is an interval of the real numbers (closed or opened) . i.e. it's a non - counted set of real numbers .

For examples:

- The wage of a government worker randomly chosen.
- The temperature expected on a day.
- The length of a basketball candidate.

Example Continuous random variable

(6) The point (x , y) is located inside or on the circle $x^2 + y^2 = 4$ whose center is the origin O and its radius length is 2 units. Required is to find the range of the random variable X expressing how distant the point from the center of the circle

Solution

$\because f = \{ (x , y): x^2 + y^2 \leqslant 4\}$

$\therefore 0 \leqslant a \leqslant 2$ where a is the distance between from point (x , y) to the center of the circle.

$\therefore$ the range of the random variable x = [0 , 2]

we can notice that each point in this interval is a possible value to the random variable X as shown in the figure

Try to solve

(1) If the maximal life span of a type of cellular phones (X) is approximated by 18 working hours, write down the range of X.

Try to solve

(2) Show which of the following represents a discrete random variable and which represents a continuous random variable.

a) Number of the bread leaves produced by a bakery within an hour.

b) The time kareem takes to wait his friend Ziad.

c) Number of the goals scored by the team won the handball match.

d) The number of the traffic violations recorded on Cairo - Alex desert rood on a day.

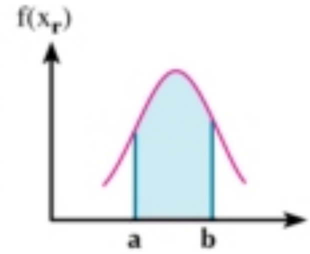
e) The time taken by a teacher to explain the lesson of the random variable.

Materials

- Scientific calculator, computer graph programs.

Probability Density Function

For any continuous random variable x, there is a real function whose range is non- negative, and denoted by the symbol f(x) called the probability density function by which the probabilities of events expressing it by the random variable can be found throughout the area included beneath the function curve and on the x axis and p (a<x<b) can be calculated by finding the area of the shaded part of the curve of the function f between the two values a and b as shown in the opposite figure .



This function satisfies the next conditions:

- $f(x) \geqslant 0$ for all the values of x belonging to the domain of the function.
- The area of the region located beneath the curve of the function f and on the x axis equal 1.

Example

(1) If x is a continuous random variable whose probability density function is:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}(2x - 1), & 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ \text{zero} & , \text{otherwise} \end{cases}$$

(a) **Prove that :** $p(1 < X < 3) = 1$

(b) **Find :** $p(X \leqslant 2)$, $p(X > 2.5)$, $p(2 \leqslant X \leqslant 2.5)$.

Solution

Remember

Area of the rectangle = length × width
Area of the triangle =
$\frac{1}{2}$ base length × height
Area of the trapezoid =
$\frac{1}{2}$ the sum of the two parallel bases × height

$f(1) = \frac{1}{6} \times (2 - 1) = \frac{1}{6}$

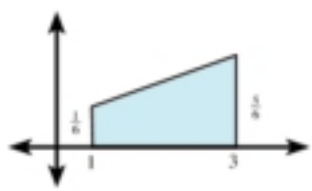
$f(3) = \frac{1}{6} \times (6 - 1) = \frac{5}{6}$

$f(2) = \frac{1}{6} \times (4 - 1) = \frac{3}{6}$

$f(2.5) = \frac{1}{6} \times (5 - 1) = \frac{4}{6}$

(a) $p(1 \leqslant x \leqslant 3) = \frac{1}{2}(\frac{1}{6} + \frac{5}{6}) \times 2$

$= \frac{1}{2} \times \frac{6}{6} \times 2 = 1$



(b) $p(X \leqslant 2) = p(1 \leqslant X \leqslant 2)$

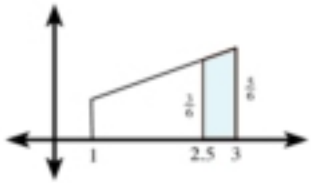
$= \frac{1}{2}(\frac{1}{6} + \frac{3}{6}) \times 1$

$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{6} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

, $p(x > 2.5) = p(2.5 < x \leqslant 3)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{6} + \frac{5}{6}\right) \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{9}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$



, $p(2 \leqslant x \leqslant 2.5) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{6} + \frac{4}{6}\right) \times \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{7}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{24}$$

Notice that : $p(2 \leqslant x \leqslant 2.5) = 1 - [\,p(x \leqslant 2) + p(x \geqslant 2.5)\,]$

$$= 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{8}\right) = 1 - \frac{17}{24} = \frac{7}{24}$$

Try to solve

3) If x is a continuous random variable where :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{50}(17 - 2x) & \text{where } 1 < x < 6 \\ \text{zero} & \text{otherwise} \end{cases}$$

a **Prove that** f(x) is a probability density function of the random variable X .

b **Find** $p(x > 3)$

c **Find** $p(4 < X < 7)$

Example

2) If x is a continuous random variable whose probability density function is:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x + k}{24} & \text{where } 1 < x < 4 \\ \text{zero} & \text{otherwise} \end{cases}$$

a Find the value of k.

b find $p(X > 3)$

Solution

$\because p(1 < x < 4) = 1$

$\therefore \frac{1}{2}\left(\frac{2 + k}{24} + \frac{8 + k}{24}\right) \times 3 = 1$

$\therefore \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{10 + 2k}{24} = 1$

$\therefore k = 3$

, $f(3) = \frac{6 + 3}{24} = \frac{9}{24}$

$f(4) = \frac{8 + 3}{24} = \frac{11}{24}$,

$$\therefore P(x > 3) = \frac{1}{6}\left(\frac{9}{24} + \frac{11}{24}\right) \times 1 = \frac{1}{6} \times \frac{20}{24} = \frac{5}{12}$$

Try to solve

4) If X is a continuous random variable whose probability density function is :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x + 1}{28} & 1 < x < 5 \\ \text{zero} & \text{otherwise} \end{cases}$$

a Find the value of a if $p(x < a) = \frac{1}{7}$

b Find the value of b if $p(b < x < b + 2) = \frac{1}{2}$

Exercises (3 - 3)

First : choose the correct answer :

1. If the probability distribution of the continuous random variable X is :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{where } 2 < x < 4 \\ \text{zero} & \text{otherwise} \end{cases}$$ then $p(X > 3) =$

a $\frac{1}{4}$ b $\frac{1}{2}$ c $\frac{3}{4}$ d 1

2. If the probability distribution of the continuous random variable X is :

$$f(x) = \begin{cases} k\,x & \text{where } 2 < x < 4 \\ \text{zero} & \text{otherwise} \end{cases}$$ then $k =$

a $\frac{1}{6}$ b $\frac{1}{3}$ c $\frac{1}{2}$ d $\frac{3}{4}$

3. If the probability distribution of the continuous random variable x is:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{where } -3 < x < 3 \\ \text{zero} & \text{otherwise} \end{cases}$$ then $p(X = 3) =$

a zero b $\frac{1}{6}$ c $\frac{1}{3}$ d $\frac{1}{2}$

Second : Answer the following questions :

4. If x is a continuous random variable where

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{18} & \text{where } -3 < X < 3 \\ \text{zero} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Find : **first**: $p(X < 0)$ **second** : $p(-1 < X < 2)$

5. If x is a continuous random variable whose probability density function is:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{24} & \text{where } 2 < x < 5 \\ \text{zero} & \text{otherwise} \end{cases}$$

find : **first** : $p(3 < X < 5)$ **second** : $p(x > 4)$

6. If X is a continuous random variable where :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x+1)}{27} & \text{where } 2 < x < 5 \\ \text{zero} & \text{otherwise} \end{cases}$$

first : prove that f(x) is a density function to the random variable X.

second : Find $p(X > 3)$

7. If X is a continuous random variable whose probability density function is:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{18} & \text{where } 1 < x < 4 \\ \text{zero} & \text{otherwise} \end{cases}$$

find : **first** : $p(X > 3)$ **second** : $p(2 < X < 4)$

8. If X is a continuous random variable whose probability density function is:

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{where } 0 < x < 4 \\ \text{zero} & \text{otherwise} \end{cases}$$

find : **first** : the value of a **second** : $p(1 < X < 3)$

9. If X is a continuous random variable whose probability density function is:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x + \mathbf{a} & \text{where } 0 < x < 4 \\ \text{zero} & \text{, otherwise} \end{cases}$$

find : **first** : the value of a **second** : $p(1 < X < 3)$

10. If X is a continuous random variable whose probability density function is:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a\,x}{2} & \text{where } 0 < x < 4 \\ \text{zero} & \text{otherwise} \end{cases}$$

find : **first** : the value of a **second** : $p(1 < X < 3)$

11. If X is a continuous random variable whose probability density function is:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{k} & \text{where } 1 < x < 5 \\ \text{zero} & \text{otherwise} \end{cases}$$

find : **first** : the value of k **second** : $p(2 < X < 3)$

Critical thinking :

12. If X is a continuous random variable whose probability density function is:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{6} & \text{where } 0 < x < 2 \\ \frac{1}{3} & \text{where } 2 < x < 4 \\ \text{zero} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Calculate : **a** $p(1 < x < 2)$ **b** the value of a making $p(2 < X < \mathbf{a}) = 0.5$

13. If X is a continuous random variable whose probability density function is:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x+1}{40} & \text{where } 1 < x < 5 \\ \text{zero} & \text{otherwise} \end{cases}$$ and if $\mathbf{a}, b \in [1, 5[$ find

a the value of a if $p(a < X < a+2) = \frac{7}{20}$ **b** the value of b if $p(X > b) = \frac{69}{80}$

Unit Summary

1 The random variable is:

Function whose domain is the elements of the sample space and its co-domain is the set of real numbers R.

2 The discrete random variable :

Its range is a finite set. (i.e. it can be counted) of the set of real numbers.

3 The continuous random variable :

its range is an interval of the real numbers (closed or opened) i.e. it is a non-counted set of real numbers.

4 Probability distribution function of the discrete random variable :

If x is a discrete random variable whose range is the set:$\{x_1, x_2, x_3, ..., x_r\}$ then the function f defined as follows: $f(x_r) = P(X = x_r)$ for each $r = 1, 2, 3, ...$

Identifies what is called the probability distribution function of the discrete random variable X which is expressed by a set of ordered pairs specifying the function F.

i.e. the probability distribution of the random variable $X = \{(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3)), ..., (x_n, f(x_n))\}$

5 Expectation (mean):

Expectation is the value at which the most values of the discrete random variable are centralized and sometimes is called " mean" and is denoted by the symbol (μ) and read as (Mu).

If X is a discrete random variable whose probability distribution function is f and its range is: $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ by probabilities of $f(x_1), f(x_2), f(x_3), ..., f(x_n)$ respectively, then the expectation is given by the relation:

$$\boxed{\text{Expectation } (\mu) = \sum_{r=1}^{n} x_r \times f(x_r)}$$

i.e.: Expectation $(\mu) = x_1 \times f(x_1) + x_2 \times f(x_2) + x_3 \square f(x_3) + ... + x_n \square f(x_n)$

6 variance:

The variance of a discrete random variable measures the amount of dispersion of the discrete random variable of its expected value and is denoted by the symbol (σ^2) and read as (squared sigma) and is given by the relation

$$\boxed{\sigma^2 = \sum_{r=1}^{n} x^2_r \square f(x_r) - \mu^2}$$

Note: The standard deviation of a discrete random variable x is the square root of the variance and is denoted by the symbol σ . It's noticed that the variance and the standard deviation are always positive quantities .

7 Coefficient of Variation:

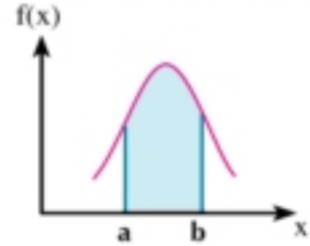
The coefficient of variation for any set of items is known as the percentage between the standard deviation of the set and its expectation (mean) and it can be determined as in the following relation :

$$\textbf{Coefficient of variation} = \frac{\textbf{standard deviation}}{\textbf{mean}} \times 100\ \% = \frac{\sigma}{\mu} \times 100\%$$

This coefficient forms the dispersion of the set in the form of a percentage abstracted from distinction where it is not affected by the measured units of the phenomenon.

8 Probability Density Function :

For any continuous random variable x, there is a real function whose range is non- negative, and denoted by the symbol f(x) called the probability density function by which the probabilities of events expressing it by the random variable can be found throughout the area included under the function curve and above the x axis and p $(a<x<b)$ can be calculated by finding the area of the shaded part of the curve of the function f between the two values a and b as shown in the opposite figure .



This function satisfies the next conditions:

- $f(x) \geqslant 0$ for all the values of x belonging to the domain of the function.
- The area of the region located under the curve of the function f and above the x axis equal 1.

General exercises

First : Choose the correct answer :

1. The expected value of the following probability distribution is:

x_r	zero	1	2
$f(x_r)$	0.2	0.3	0.5

a) 1 b) 1.14 c) 1.3 d) 1.5

2. If the expectation of the following probability distribution is:

x_r	1	2	k
$f(x_r)$	0.1	0.8	0.1

equals 2, then the value of k equals

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6

3. If x is a continuous random variable whose probability density function is :

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{where } -4 < x < 4 \\ \text{zero} & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{then } k =$$

a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{4}$ c) zero d) 4

second: answer the following questions

4. If X is a discrete random variable whose range $= \{-3, -1, 0, 1, 3\}$ and the values of $p(X = -3) = p(X = 3) = \frac{1}{9}$, $p(X = 0) = \frac{4}{9}$, $p(X = -1) = p(X = 1)$ find the probability distribution function of the discrete random variable.

5. If X is a discrete random variable whose probability distribution function is determined by the function $f(x) = \frac{x+4}{16}$ where $x = -2, m, 1, 2$ find the value of the constant m, then write down he probability distribution function of the variable X

6. If X is a discrete random variable whose probability distribution is determined by the function $f(x) = \frac{a x^2}{2}$ where $x = 0, 1, 2, 3$ find the value of a then find $p(X \leqslant 2)$.

7. In an experiment of rolling a regular die two consecutive times and observing the number on the upper face in each time. Find the probability distribution of the discrete random variable expressing the greater number appeared on the upper two faces.

(8) Design a die in a way two faces carry the number 1, two faces carry the number 3 and two faces carry the number 5. Roll this die two consecutive times and observe the number appearing the upper face in each time. If the discrete random variable X expresses "the absolute difference between the two upper numbers"

Find : First : the probability distribution of the discrete random variable X.

Second : the probability of getting the absolute difference between the two numbers less than 4 .

(9) Two regular dices; each two opposite faces of the first die are numbered {1, 3, 5} and each two opposite faces of the second die are numbered { 2 , 4 , 6 } If the two dices have been rolled and the random variable X expresses the sum of the two numbers, find the probability distribution function of the variable x and calculate the mean and the standard deviation of the variable x.

(10) Two boxes a and b, each contains 4 balls numbered from 1 to 4. A ball is randomly drawn from each box. If the random variable is " the sum of the two numbers appeared on the two drawn balls", find the probability distribution function of the variable X and calculate the mean and the standard deviation.

(11) If x is a random variable whose mean $\mu = 2$ and its probability distribution is as follows:

x_r	1	0	2	a
$f(x_r)$	$\frac{1}{12}$	b	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$

First : calculate the two values of a and b   **Second** : calculate the standard variation

(12) If X is a continuous random variable whose probability density function:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{16} & \text{Where } 0 < x < 4 \\ \text{Zero} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Find : **First** : $P(X < 2)$ **Second** : $p(1 < X < 4)$

(13) If X is a continuous random variable whose probability density function :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{8} & \text{Where } a < x < a+2 \\ \text{Zero} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Find : **First** : the value of a   **Second** : $p(X < 3)$

For more activities and exercises, visit www.sec3mathematics.com.eg

Accumulative test

(1) In the spinning wheel game, the wheel has been divided into 16 identical sectors numbered from 1 to 16. What is the probability the indicator lands on an odd number known that it is landed on a number greater than 5?

(2) Roads : the next table shows the probability distribution for the number of the accidents expected during the rain days on the roads.

Number of accidents	zero	1	2	3	4	5	6
Probability	0.1	0.26	0.31	0.14	0.11	0.06	0.02

Calculate the expected value for the number of these accidents.

(3) Media : Some electronic sites have formed a survey related to the most TV program seen by people and the results have been recorded as shown in the following table :

Type of the program	Cultural	Social	News	Sports	Entertaining	Others
Probability of occurrence	0.14	0.2	0.24	0.18	0.16	0.08

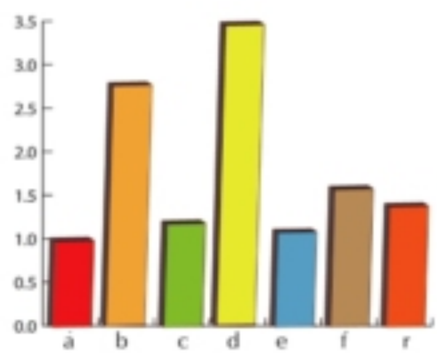
a. Represent these data by columns

b. Prove that these data represent a probability distribution

c. If a spectator has been randomly chosen, find the probability of choosing a social or sports program.

d. Do a report about the effects media on forming the social culture.

(4) Sports : 7 racers have participated in a short-range race, the probability to win such a race has been represented in the opposite graph :



a. Show which of these distributions represents a probability distribution.

b. Find the probability racers b, a, and e to win this competition.

(5) If X is a continuous random variable whose probability density function is :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{12} & \text{where } 0 < x < 4 \\ \text{zero} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Find : **first** : $p(X < 2)$ **Second** : $p(2 < X < 5)$

Unit 4

Normal distribution

introduction

The normal distribution is considered one of the most important probability distributions learned in the statistics curricula due to its various uses to the outcomes of some processes in the physical, economic and social sciences and it deals with the phenomena of our daily life. The french scientist Abraham de Moivre was the first to use the normal distribution in 1756 in one of its prints. Some other scientists such as the German scientist Carl Friedrich Gauss(1777-1855) has participated in developing the normal distribution. The normal distribution is sometimes named after him (Gauss curve).

Carl Friedrich Gauss

Abraham de Moivre

The most well-known application of the normal distribution is the administrative evaluation of the subordinates in order to ensure the justice. The normal distribution is used to study the remains of analyzing the slope and it has a close relation with the control charts and so on.

Unit objectives

By the end of the unit and carrying out the involved activities, the student should be able to:

- Identify the normal distribution and its properties.
- Calculate the probability of the standard variable.
- Calculate the probability of the non-standard normal variable.
- Identify the standard normal random variable and the general form of the curve representing the density function of this variable.
- Convert any normal random variable into a standard normal variable.
- Find the values of the probabilities of a random variable with a standard normal distribution using the statistical tables.
- Explain the properties of the normal distribution curve and some phenomena it expresses.
- Explain the results which they have obtained through calculating the probability of the normal random variable.

Key Terms

- Normal distribution
- Normal random variable
- Normal curve
- Standard normal curve

Lessons of the unit

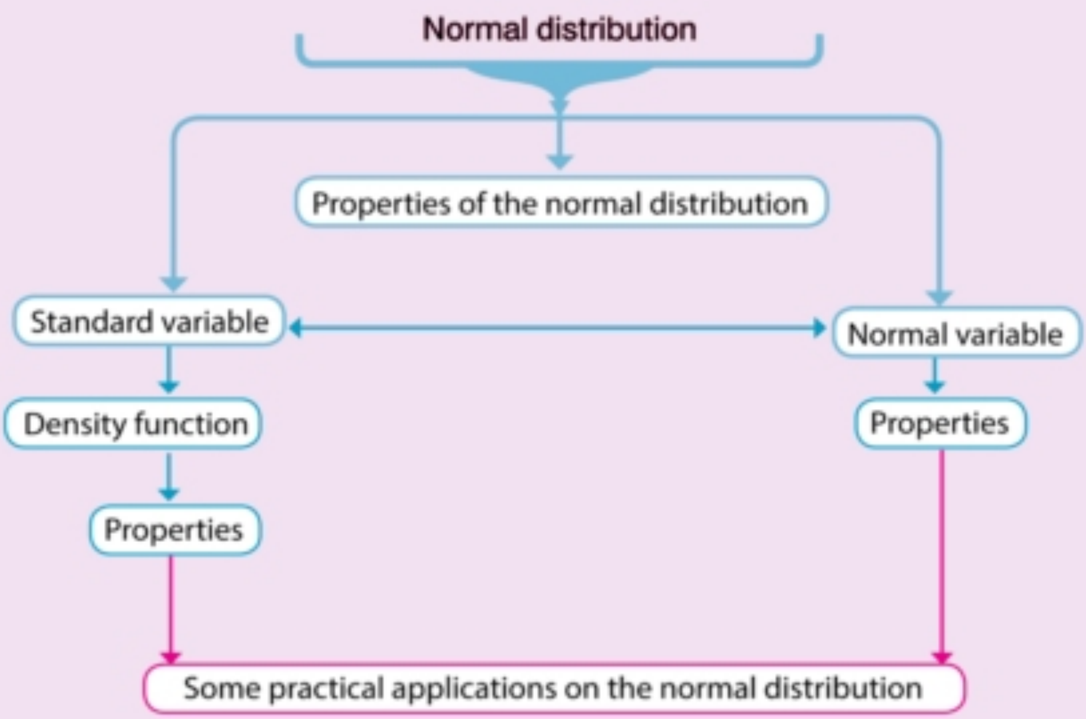
Lesson (4-1) Normal distribution

Lesson (4-2) Some practical applications on the normal distribution

Materials

Scientific calculator

Unit planning organizer



Unit 4

4 - 1 Normal distribution

You will learn

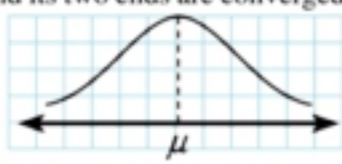
- Normal random variable
- Some properties of the normal distribution
- Standard normal distribution
- Properties of the density function of the standard normal distribution
- Calculating the probability of the standard normal distribution.

Key terms

- Normal distribution
- Normal random variable
- Normal curve
- Standard normal distribution

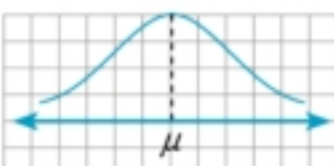
Introduction:

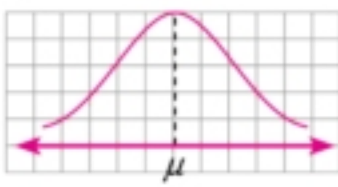
The normal distribution is one of the most important continuous probability distributions since it has important theoretical properties. Furthermore, the outcomes of the normal distribution can take any value within an interval of the real numbers. For example, the lengths of adults, the weights of babies as they were born and the intelligence degree of people and so on. The normal distribution can be described as a mathematical equation identifying its curve. This equation is identified thoroughly by knowing the expectation (mean) μ and the standard deviation σ . This curve is bell-like. It is symmetrical on the straight line $x = \mu$ and its two ends are converged from the horizontal axis where its two ends expand infinitely as shown in the opposite figure.



Normal random variable:

It is said that the continuous random variable x is "a normal random variable" if its range can be identified by the interval $]-\infty , \infty[$ and its probability density function is represented by a bill-like curve. The curve of the density function is called the normal curve or "Gauss curve". The value of the curve is identified by knowing two basic values: the mean μ and the standard deviation σ of the random variable x as shown in the next figures.





Some properties of the normal curve

(1) It has one top and its two ends extends to $-\infty , \infty$.

(2) It has a symmetrical axis passing through the top and intersecting the horizontal axis when $X = \mu$.

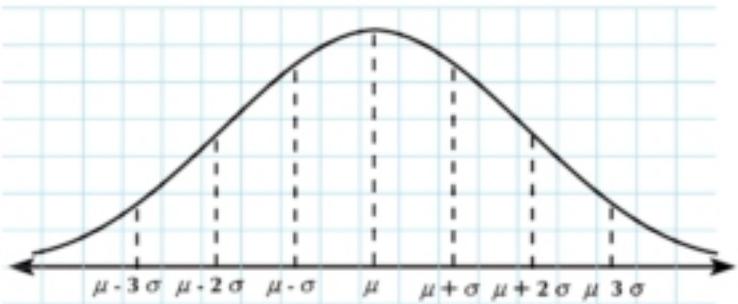
(3) The area of the region placed under the normal curve and above the X axis equals 1 .

(4) From symmetry, we find that the straight line $X = \mu$ divides the area placed under the curve and above the X axis into two regions; the area of each region = 0.5.

Materials — Scientific calculator.

(5) The approximate area of the region under the curve and above the X axis can be calculated in regard to the following intervals:

- From μ - σ to $\mu + \sigma$ = 68.26 % the total area .
- From μ - 2σ to μ + 2σ = 95.44 % the total area .
- From μ - 3σ to μ + 3σ = 99.74 % the total area .



Notice : The number of data should be big in order to make the normal distribution approximated

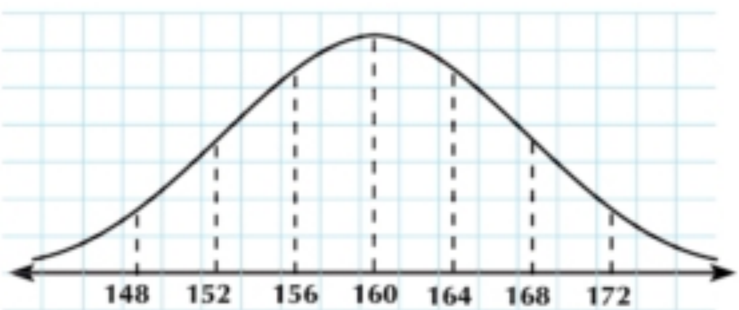
Example

1 If the lengths of students at a school follow a normal distribution of an average of 160 cm, the standard deviation is 4 cm. a student is randomly chosen, find the probability of the length of the student is:

a Taller than 172 cm b Shorter than 156 cm

c Included between 156 cm and 168 cm

Solution



From the given data, we find that: the mean $\mu = 160$ and the standard deviation $\sigma = 4$

By comparing the data with the normal distribution curve, we find that: $\mu + 3$ x = 160 + 3 □4 so,

a $P(x > 172) = P(x > \mu + 3\sigma)$

$\because$ The area from $\mu - 3\sigma$ to $\mu + 3\sigma = 0.9974$

$\therefore$ The area from μ to $\mu + 3\sigma = 0.9974 \div 2 = 0.4987$

$\therefore$ The area on the right of $\mu + 3\sigma = 0.5 - 0.4987 = 0.0013$

b $P(x < 156) = P(x < \mu - \sigma)$

$\because$ The area from $\mu - \sigma$ to $\mu + \sigma = 0.6826$

$\therefore$ The area from μ to $\mu - \sigma = 0.6826 \div 2 = 0.3413$

$\therefore$ The area on the left of $\mu - \sigma = 0.5 - 0.3413 = 0.1587$

c $P(156 < x < 168) = P(\mu - \sigma < x < \mu + 2\sigma) = P(\mu - \sigma < x < \mu) + P(\mu < x < \mu + 2\sigma)$

$$= \frac{0.6816}{2} + \frac{0.9544}{2} = 0.3408 + 0.4772 = 0.818$$

Try to solve

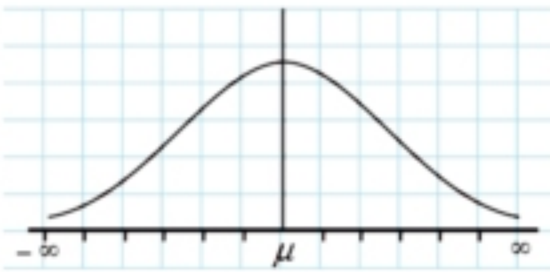
(1) If the weights of the students in a faculty follow a normal distribution μ of an average = 68 kg and its variance is 16 kg^2, find:

a The probability that the weight is greater than 72 kg

b The percentage of the students whose weights range between 64 kg and 72 kg "the weight of each student".

c The number of the students whose weights are more than 64 kg if the total number of the college students is 2000 students.

The standard normal distribution

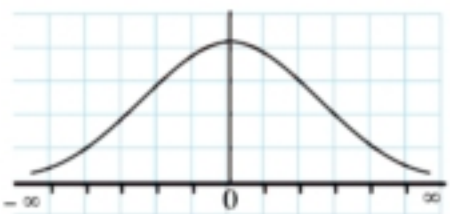


In the normal distribution, we have noticed that when you find the probability, the lengths of the intervals are multiples of the standard deviation in order to calculate the probability. Hence, it has been proper to convert the normal distributions into standard normal distributions by converting the values of (x) into standard values of (z) in terms of the mean μ and the standard deviation σ; at which $\mu = 0$, $\sigma = 1$

Definition

If the probability distribution of the random variable x is the normal distribution by a mean μ and standard deviation σ, then $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ is the standard normal distribution whose mean is μ = zero and standard deviation $\sigma = 1$.

Some properties of the density function of the standard normal distribution (z).



(1) The curve is located above the horizontal axis (X axis).

(2) It is symmetrical in terms of the vertical axis (Y axis).

(3) The two ends of the curve extends infinitely without getting converged with the horizontal axis.

(4) The area of the region under the curve and above the horizontal axis = 1.

(5) From the symmetry, we find that the vertical axis divides the region under the curve and above the horizontal axis into two regions the area of each = 0.5.

(6) The approximate area of the region located under the standard curve only and above any interval]a , b[by special tables can be calculated.

The table of the area under the standard normal distribution curve:

To convert the normal distribution X into standard normal distribution Z you use the relation:

$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$, from the table of the standard normal distribution attached at the end of the book, you can find the required area .

Here, we explain how you can use the table of area under the standard normal distribution.

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0						0.0199				
0.1										
0.2										
0.3										
0.4	0.1554									
0.5										
0.6				0.2357						
2.5								0.4949		
3.5										

$P(0 \leqslant Z \leqslant 0.05)$ = the area under the standard normal distribution is above the interval $[0 , 0.05]$ i.e. $z = 0.05$, and so, we search in the table in raw 0.00 and under the column 0.05, to find the number is 0.0199

$\therefore P(0 \leqslant Z \leqslant 0.05) = 0.0199$

$P(0 \leqslant Z \leqslant 0.4)$ = the area under the standard normal distribution is above the interval $[0 , 0.4]$ i.e. $z = 0.4$, and so, we search in the table in raw 0.4 and under the column 0.00, to find the number is 0.1554.

$\therefore P(0 \leqslant Z \leqslant 0.4) = 0.1554$

$P(0 \leqslant Z \leqslant 0.63)$ = the area under the standard normal distribution is above the interval $[0 , 0.63]$ I.e. $z = 0.63$, and so, we search in the table in raw 0.6 and under the column 0.03, to find the number is 0.2357. 0.2357

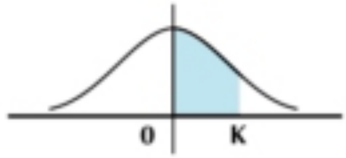
$\therefore P(0 \leqslant Z \leqslant 0.63) = 0.2357$

$P(0 \leqslant Z \leqslant 2.57)$ = the area under the standard normal distribution is above the interval $[0 , 2.57]$ I.e. $z = 2.57$, and so, we search in the table in raw 2.5 and under the column 0.07, to find the number is 0.4949

$\therefore P(0 \leqslant Z \leqslant 2.57) = 0.4949$

Calculating the probability of the standard normal variable:

(1) To find the area of the region under the curve in the interval [0 , K] from the table



The table of areas under the standard normal curve gives the approximate area above the interval [0 , K] and under the normal curve where $K \geqslant 0$, i.e. the table directly gives us $P(0 \leqslant Z \leqslant K)$

For example: $P(0 \leqslant Z \leqslant 0.3) = 0.1179$, $P(0 < Z \leqslant 0.64) = 0.2389$

$P(0 \leqslant Z \leqslant 1.7) = 0.4554$, $P(0 \leqslant Z < 2.45) = 0.4929$

Notice that: $P(Z \geqslant 1.4) = 0.5 - P(0 \leqslant Z \leqslant 1.4)$

$= 0.05 - 0.4192$

$= 0.0808$

Similarly: $P(Z \leqslant 0.95) = 0.5 + P(0 \leqslant Z \leqslant 0.95)$

$= 0.5 + 0.3289$

$= 0.8289$

(2) Finding the area of the region under the curve in the interval [- K , 0] from the table

From the symmetry of the standard normal curve around the vertical axis, we find that :

$P(-K \leqslant Z \leqslant 0) = P(0 \leqslant Z \leqslant K)$

For example: $P(-1.25 \leqslant Z \leqslant 0) = P(0 \leqslant Z \leqslant 1.25) = 0.3944$

, $P(-2.24 \leqslant Z \leqslant 0) = P(0 \leqslant Z \leqslant 2.24) = 0.4875$

, $P(Z \leqslant -1.6) = 0.5 - P(-1.6 \leqslant Z \leqslant 0)$

$= 0.5 - P(0 \leqslant Z \leqslant 1.6)$

$= 0.5 - 0.4452 = 0.0548$

, $P(Z \geqslant -2.32) = 0.5 + P(-2.32 \leqslant Z \leqslant 0)$

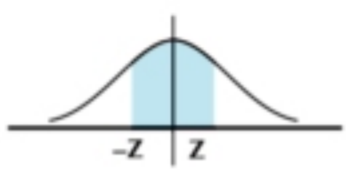
$= 0.5 + P(0 \leqslant Z \leqslant 2.32)$

$= 0.5 + 0.4898 = 0.9898$

Notice that: $P(-K \leqslant Z \leqslant K) = 2 \square P(0 \leqslant Z \leqslant K)$

For example: $P(-1.4 \leqslant Z \leqslant 1.4) = 2 \square P(0 \leqslant Z \leqslant 1.4)$

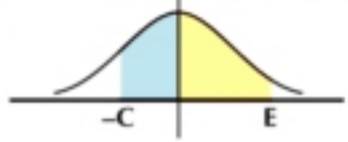
$= 2 \square 0.4192 = 0.8384$



, $P(-2.0 \leqslant Z \leqslant 2.0) = 2 \square P(0 \leqslant Z \leqslant 2.0) = 2 \square 0.4772 = 0.9544$

(3) Finding the area of the region under the curve in any interval [C , E]:

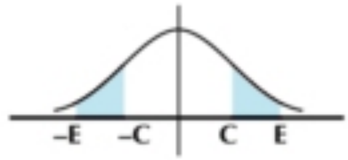
In this case, it is favorable to draw the standard curve and observing that the vertical axis divides the area under the curve and above the horizontal axis into two equal areas and the area of each = 0.5.



First: $P(-C \leqslant Z \leqslant E)$ where C and E are positive.

$= P(-C \leqslant Z \leqslant 0) + P(0 \leqslant Z \leqslant E)$

$= P(0 \leqslant Z \leqslant c) + P(0 \leqslant Z \leqslant E)$



Second: $P(C \leqslant Z \leqslant E) = P(-E \leqslant Z \leqslant -C)$

$= P(0 \leqslant Z \leqslant E) - P(0 \leqslant Z \leqslant C)$

For example:

(1) $P(-0.7 \leqslant Z \leqslant 2.4)$

$= P(-0.7 \leqslant Z \leqslant 0) + P(0 \leqslant Z \leqslant 2.4)$

$= P(0 \leqslant Z \leqslant 0.7) + P(0 \leqslant Z \leqslant 2.4)$ from symmetry

$= 0.2580 + 0.4918 = 0.7498$

(2) $P(-1.62 < Z \leqslant 0.44)$

$= P(-1.62 < Z \leqslant 0) + P(0 \leqslant Z \leqslant 0.44)$

$= P(0 \leqslant Z \leqslant 1.62) + P(0 \leqslant Z \leqslant 0.44)$ from symmetry

$= 0.4474 + 0.1700 = 0.6174$

(3) $P(0.4 \leqslant Z < 1.6) = P(0 \leqslant Z < 1.6) - P(0 \leqslant Z \leqslant 0.4)$

$= 0.4452 - 0.1554 = 0.2898$

(4) $P(-1.4 < Z < -0.34)$

$= P(-1.4 < Z \leqslant 0) - P(-0.34 < Z \leqslant 0)$

$= P(0 \leqslant Z \leqslant 1.4) + P(0 \leqslant Z \leqslant 0.34)$ from symmetry

$= 0.4192 - 0.1331 = 0.2861$

Example **Finding the area under the standard normal curve**

2 If Z is a standard normal random variable, find:

a $P(Z \leqslant 1.12)$ **b** $P(Z \geqslant 1.64)$ **c** $P(0.48 \leqslant Z \leqslant 2.1)$

Solution

a $P(Z \leqslant 1.12)$

$= P(0 \leqslant Z \leqslant 1.12) + P(Z \leqslant 0)$

$= 0.3686 + 0.5 = 0.8686$

b $P(Z \geqslant 1.64)$

$= P(Z \geqslant 0) - P(0 \leqslant Z \leqslant 1.64)$

$= 0.5 - 0.4495 = 0.0505$

c $P(0.48 \leqslant Z \leqslant 2.1)$

$= P(0 \leqslant Z \leqslant 2.1) - P(0 \leqslant Z \leqslant 0.48)$

$= 0.4821 - 0.1844 = 0.2977$

Try to solve

2 If Z is a standard normal random variable, find:

a $P(0 \leqslant Z \leqslant 0.82)$ **b** $P(Z \geqslant 2.32)$

c $P(Z \leqslant 1.64)$ **d** $P(1.08 \leqslant Z \leqslant 3.12)$

Example

3 If Z is a standard normal random variable, find:

a $P(Z \leqslant -0.56)$ **b** $P(Z \geqslant -1.06)$

c $P(-1.2 \leqslant Z \leqslant 2.48)$ **d** $P(-2.2 \leqslant Z \leqslant -0.46)$

Solution

a $P(Z \leqslant -0.56)$

$= P(Z \geqslant 0.56)$

$= 0.5 - P(0 \leqslant Z \leqslant 0.56) = 0.5 - 0.2123 = 0.2877$

b $P(Z \geqslant -1.06)$

$= P(Z \leqslant 1.06)$

$= P(0 \leqslant Z \leqslant 1.06) + 0.5$

$= 0.0636 + 0.5 = 0.5636$

c $P(-1.2 \leqslant Z \leqslant 2.48)$

$= P(-1.2 \leqslant Z \leqslant 0) + P(0 \leqslant Z \leqslant 2.48)$

$= P(0 \leqslant Z \leqslant 1.2) + P(0 \leqslant Z \leqslant 2.48)$

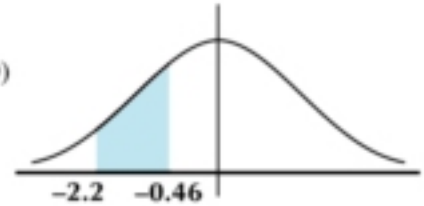
$= 0.3849 + 0.4934 = 0.8783$

d $P(-2.2 \leqslant Z \leqslant -0.46)$

$= P(-2.2 \leqslant Z \leqslant 0) - P(-0.46 \leqslant Z \leqslant 0)$

$= P(0 \leqslant Z \leqslant 2.2) - P(0 \leqslant Z \leqslant 0.46)$

$= 0.4861 - 0.1772 = 0.3089$



Try to solve

3. If Z is a standard normal random variable, find:

a $P(Z \leqslant -0.56)$ **b** $P(Z \geqslant -1.06)$

c $P(-1.2 \leqslant Z \leqslant 2.48)$ **d** $P(-2.2 \leqslant Z \leqslant -0.46)$

Example

Converting from a normal variable into a standard normal variable

4. If X is a normal random variable whose mean is μ and standard deviation is σ , find:

a $P(X > \mu - 1.5\sigma)$ **b** $P(X < \mu - 0.5\sigma)$

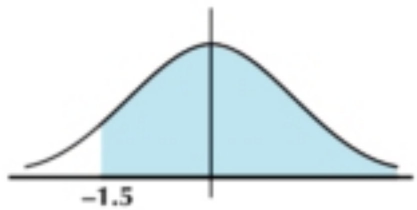
c $P(\mu - 1.96\sigma < X < \mu + 1.96\sigma)$

Solution

a $P(Z > \frac{\mu - \sigma 1.5 - \mu}{\sigma}) = P(Z > -1.5)$

$= P(-1.5 < Z < 0) + 0.5$

$= P(0 < Z < 1.5) + 0.5 = 0.4332 + 0.5 = 0.9332$



b $Z(X < \mu - 0.5\sigma) = P(Z < \frac{\mu - \sigma 0.5 - \mu}{\sigma})$

$= P(Z < -0.5) = P(Z > 0.5)$

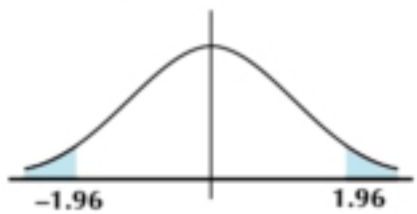
$= 0.5 - P(0 < Z < 0.5) = 0.5 - 0.1915 = 0.3085$

c $P(\mu - 1.96\sigma < X < \mu + 1.96\sigma)$

$= P(\frac{\mu - \sigma 1.96 - \mu}{\sigma} < Z < \frac{\mu - \sigma 1.96 - \mu}{\sigma})$

$= P(-1.96 < Z < 1.96)$

$= 2\, P(0 < Z < 1.96) = 2 \square 0.4750 = 0.95$



Try to solve

4. If X is a normal random variable whose mean is μ and standard deviation is σ, find:

a $P(X < \mu - 2.1\sigma)$ **b** $(X > \mu + 0.8\sigma)$

c $P(\mu - 1.48\sigma < X < \mu + 1.48\sigma)$

Example

(5) If Z is a standard normal random variable, find the value of k in each of the following cases :

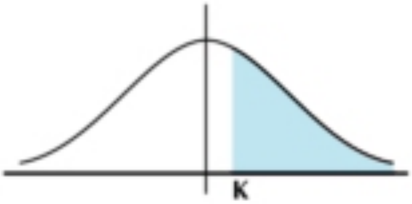
a $P(Z \geqslant K) = 0.1056$ **b** $P(Z \leqslant K) = 0.1151$

c $P(-0.44 \leqslant Z \leqslant K) = 0.5588$ **d** $P(K \leqslant Z \leqslant 2.1) = 0.2906$

Solution

a We notice that:

The area < 0.5 and the sign of the inequality "greater than", so K lies at the positive interval as shown in the opposite figure.



$\because P(Z \geqslant K) = 0.1056$

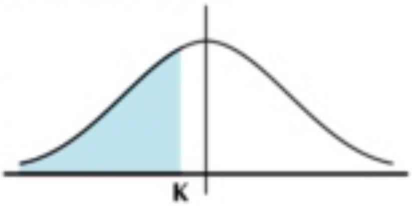
$\therefore 0.5 - P(0 \leqslant Z \leqslant K) = 0.1056$

$\therefore P(0 \leqslant Z \leqslant K) = 0.5 - 0.1056 = 0.3944$

In the area tables, we try to find the number (Z) or the nearest number corresponding the area 0.3944. We find that 1.2 is under the differences 0.05. **I.e.** $K = 1.25$

b We notice that:

The area < 0.5 , and the sign of the inequality "less than", so k lies at the negative interval as shown in the opposite figure.



$\because P(Z \leqslant K) = 0.1151$

From the symmetry in the curve, we find that: $P(Z \geqslant K) = 0.1151$

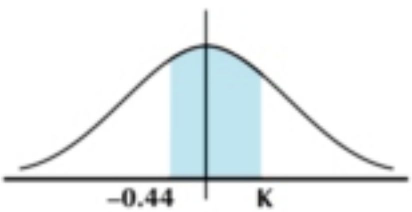
$\therefore 0.5 - P(0 \leqslant Z \leqslant K) = 0.1151$

$\therefore P(0 \leqslant Z \leqslant K) = 0.5 - 0.1151 = 0.3849$

$\therefore K = -1.2$ (**notice that k lies at the negative part**)

c We notice that :

The area > 0.5 and an end of the interval lie at the negative interval, so the other end of the interval z lies at the positive interval as shown in the opposite figure.



$\because P(-0.44 \leqslant Z \leqslant K) = 0.5588$

$\therefore P(-0.44 \leqslant Z \leqslant 0) + P(0 \leqslant Z \leqslant K) = 0.5588$

$\therefore P(0 \leqslant Z \leqslant 0.44) + P(0 \leqslant Z \leqslant K) = 0.5588$

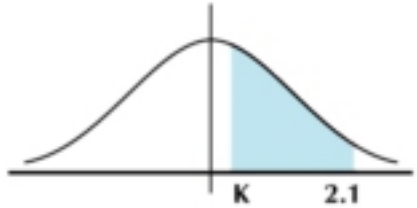
$\therefore 0.1700 + P(0 \leqslant Z \leqslant K) = 0.5588$

$\therefore P(0 \leqslant Z \leqslant K) = 0.5588 - 0.1700 = 0.3888$

$\therefore K = 1.22$

d We notice that :

The area < 0.5 and an end of the interval lie at the positive interval, so the other end of the interval g lies at the positive interval as shown in the opposite figure. (also $P(0 \leqslant Z \leqslant 2.1) > 0.2906$)



$\because P(K \leqslant Z \leqslant 2.1) = 0.2906$

$\therefore P(0 \leqslant Z \leqslant 2.1) - P(0 \leqslant Z \leqslant K) = 0.2906$

$\therefore P(0 \leqslant Z \leqslant K) = P(0 \leqslant Z \leqslant 2.1) - 0.2906$

$= 0.4821 - 0.2906 = 0.1915$ $\qquad \therefore$ **$K = 0.5$**

Try to solve

5) If Z is a standard normal random variable, find the value of k in each of the following cases:

a $P(Z \geqslant K) = 0.1980$

b $P(Z \leqslant K) = 0.1980$

c $P(-2.4 \leqslant Z \leqslant K) = 0.7970$

d $P(K \leqslant Z \leqslant 2.5) = 0.8238$

Example

6) If x is a normal random variable whose mean is μ and standard deviation is σ

a If: $P(X \geqslant 180) = 0.0062$, $\mu = 165$ calculate σ

b If: $P(X > 35) = 0.8643$, $\sigma = 5$ calculate μ

c If: $P(X \leqslant 170) = 0.0228$, $\sigma = 7$ calculate μ

d If: $P(X \leqslant K) = 0.8944$, $\mu = 125$, $\sigma = 8$ calculate K

e If: $P(X > K) = 0.9452$, $\mu = 50$, $\sigma = 5$ calculate K

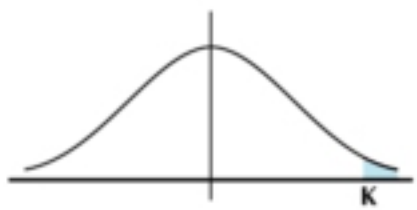
Solution

a $P(X \geqslant 180) = P(Z \geqslant \frac{180 - 165}{\sigma}) = 0.0062$

$\therefore P(Z \geqslant K) = 0.0062$ where $K = \frac{15}{\sigma}$, $K > 0$

$\therefore P(0 \leqslant Z \leqslant K) = 0.5 - 0.0062 = 0.4938$

$\therefore K = 2.5$



$\therefore \frac{15}{\sigma} = \frac{5}{2}$ $\qquad \therefore \sigma = \frac{2 \square 15}{5}$ $\qquad \therefore$ **$\sigma = 6$**

b $P(X > 35) = P(Z > \frac{35 - \mu}{5}) = 0.8643$

$\therefore\ P(Z > K) = 0.8643$ where

$\therefore\ K = \frac{35 - \mu}{5}$, $K < 0$

$\therefore\ P(0 \leqslant Z \leqslant -K) + 0.5 = -0.8643$

$P(K < Z \leqslant 0) = 0.8643 - 0.5 = 0.3643$ $\quad \therefore K = -1.1$

$\therefore \frac{35 - \mu}{5} = -1.1$ $\quad \therefore 35 - \mu = -5.5$

$\therefore \mu = 35 + 5.5$ $\quad$ **$\therefore \mu = 40.5$**

c $P(X \leqslant 170) = P(Z \leqslant \frac{170 - \mu}{7}) = 0.0228$

$\therefore P(Z \leqslant K) = 0.0228$ where $K = \frac{170 - \mu}{7}$, $K < 0$

$\therefore P(K \leqslant Z \leqslant 0) = 0.5 - 0.0228 = 0.4772$

$\therefore K = -2$

$\therefore \frac{170 - \mu}{7} = -2$ $\quad \therefore 170 - \mu = -14$ $\quad \therefore \mu = 170 + 14$ $\quad$ **$\mu = 184$**

d $P(X \leqslant K) = P(Z \leqslant \frac{K - 125}{8}) = 0.8944$

$\therefore P(Z \leqslant z) = 0.8944$

where $z = \frac{K - 125}{8}$, $z > 0$

$\therefore P(0 \leqslant Z \leqslant z) = 0.8944 - 0.5 = 0.3944$ $\quad \therefore z = 1.25$

$\therefore \frac{K - 125}{8} = 1.25$ $\quad \therefore K - 125 = 10$ $\quad \therefore K = 125 + 10$ $\quad \therefore K = 135$

e $P(X > K) = P(Z > \frac{K - 50}{5}) = 0.9452$

$\therefore P(Z > z) = 0.9452$

where $z = \frac{K - 50}{5}$, $z < 0$

$\therefore P(0 \leqslant Z < -z) = 0.9452 - 0.5 = 0.4452$ $\quad \therefore z = -1.6$

$\therefore \frac{K - 50}{5} = -1.6$ $\quad \therefore K - 50 = -8$ $\quad \therefore K = 50 - 8$ $\quad$ **$K = 42$**

Try to solve

6 If X is a normal random variable whose mean is μ , standard deviation is σ, $P(X < 19) = 0.7734$ and $P(X > 10) = 0.9332$, calculate the value of μ and σ.

Exercises 4 - 1

1. If Z is a standard normal random variable, find :

a) $P(0 \leqslant Z \leqslant 1.15)$, $P(0 \leqslant Z \leqslant 2.42)$

b) $P(-0.04 \leqslant Z \leqslant 0)$, $P(-1.63 \leqslant Z \leqslant 0)$

c) $P(-0.7 \leqslant Z \leqslant 0.7)$, $P(-1.65 \leqslant Z \leqslant 1.65)$

d) $P(-2.42 \leqslant Z \leqslant 1.67)$, $P(-1.73 \leqslant Z \leqslant 0.64)$

e) $P(0.74 \leqslant Z \leqslant 1.02)$, $P(1.4 \leqslant Z \leqslant 2.2)$

f) $P(-2.1 \leqslant Z \leqslant -0.92)$, $P(-1.5 \leqslant Z \leqslant -0.84)$

g) $P(Z \leqslant 1.44)$, $P(Z \leqslant 2.05)$

h) $P(Z \leqslant -1.14)$, $P(Z \leqslant -2.32)$

i) $P(Z \leqslant 0.65)$, $P(Z \leqslant 1.42)$

j) $P(Z \leqslant -0.45)$, $P(Z \leqslant -1.6)$

2. If Z is a standard normal random variable, find the value of the real number k which satisfies:

a) $P(0 \leqslant Z \leqslant K) = 0.3554$

b) $P(K \leqslant Z \leqslant 0) = 0.4120$

c) $P(-K \leqslant Z \leqslant K) = 0.2206$

d) $P(Z \leqslant K) = 0.9754$

e) $P(Z \leqslant K) = 0.1977$

f) $P(Z \geqslant K) = 0.0934$

g) $P(Z \geqslant K) = 0.9955$

h) $P(K \leqslant Z \leqslant 1.11) = 0.6660$

i) $P(K \leqslant Z \leqslant 2.22) = 0.2446$

j) $P(-1.7 \leqslant Z \leqslant K) = 0.3261$

3. Z is a standard normal random variable, if :

a) $P(Z \leqslant K) = 0.1736$ Find: $P(K \leqslant Z \leqslant 1.7)$

b $P(Z \geqslant K) = 0.0207$ Find: $P(0.56 \leqslant Z \leqslant K)$

c $P(Z \leqslant K) = 0.8944$ Find: $P(-0.7 \leqslant Z \leqslant K)$

d $P(0.4 \leqslant Z \leqslant K) = 0.3110$ Find: $P(Z \leqslant K)$

e $P(1.4 \leqslant Z \leqslant K) = 0.0770$ Find: $P(-1.4 \leqslant Z \leqslant K)$

f $P(K \leqslant Z \leqslant 1.7) = 0.8586$ Find: $P(K \leqslant Z \leqslant 0.75)$

(4) X is a normal random variable whose mean is μ, standard deviation is σ and

a $P(X \leqslant 90) = 0.0668$, $\mu = 102$ Calculate σ

b $P(X \geqslant 62) = 0.0548$, $\mu = 50$ Calculate σ

c $P(X \geqslant 48) = 0.0228$, $\sigma = 4$ Calculate μ

d $P(X > 68) = 0.1056$, $\sigma = 6.4$ Calculate μ

e $P(X \geqslant 42) = 0.8944$, $\sigma = 6.4$ Calculate μ

f $P(\mu - K\sigma \leqslant x \leqslant \mu + K\sigma) = 0.438$ Calculate K

g $P(X \leqslant K) = 0.2119$, $\mu = 42$, $\sigma = 5$ Calculate K

h $P(X \leqslant K) = 0.8413$, $\mu = 72$, $\sigma = 8$ Calculate K

i $P(X > K) = 0.9772$, $\mu = 60$, $\sigma = 4$ Calculate K

(5) Answer the following questions

a If X is a normal random variable whose mean is 120, standard deviation is 10 and $p(X < K) = 0.9599$, find the value of k .

b If X is a normal random variable whose mean is μ, standard deviation is $\sigma = 5$, find the value of μ which makes $p(X \leqslant 35) = 0.0228$

c If X is a normal random variable whose mean is $\mu = 8$, standard deviation is $\sigma = 2$ and $P(K \geqslant X) = 0.1056$, find:

First : The value of k . **Second** : $P(X \leqslant 10)$

d If X is a normal random variable whose mean is μ and standard deviation is σ , find $P(\mu - \frac{1}{4}\sigma \leqslant X \leqslant \mu + \frac{1}{2}\sigma)$

e If Z is a standard normal random variable, find the value of k which satisfies :

First : $P(Z > K) = 0.0281$

Second : $P(-1 < Z < K) = 0.7918$

f If X is a normal random variable whose mean is 18 and standard deviation is 2.5, find :

First: $P(X < 15)$

Second: $P(17 < X < 21)$

g If X is a normal random variable whose mean $\mu = 24$ and standard deviation $\sigma = 5$, find:

First : $P(X \geqslant 32.5)$

Second : $P(14 < X < 29)$

g If X is a normal random variable whose mean $\mu = 48$ and standard deviation $\sigma = 5$, find:

First : $P(43 < X < 59)$

Second : The value of K if $P(x > K) = 0.1841$.

h If X is a normal random variable whose mean $\mu = 17$ and standard deviation $\sigma = 2$, find:

First : $P(16 \leqslant X \leqslant 20)$

Second : $P(X > 15)$

i If X is a normal random variable whose mean is 32 and variance is 16, find :

First : $P(X < 25)$

Second : $P(28 < X < 35)$

j If X is a normal random variable whose mean $\mu = 8$ and standard deviation $\sigma = 2$, find:

First : $P(X \leqslant 10)$

Second : If $P(X \geqslant K) = 0.1056$, find the value of k .

Unit 4

4 - 2 Some practical applications of the normal distribution

You will learn

- Practical applications on the normal distribution

Key terms

- Normal distribution
- Normal curve
- Normal random variable
- Standard normal distribution

Introduction:

In the previous lesson, you became familiar with the normal distribution and its properties and you also knew the standard normal random variable and how to find it in terms of the mean and the standard deviation. You also knew how to calculate the probabilities of a random variable with a standard normal distribution using the statistical tables.

In this lesson, you are going to learn some different uses of the normal random variable for studying some phenomena it may express.

Example **Industry**

(1) A machine in a factory produces cylinders of lengths follow a normal distribution whose mean is 56 cm and the standard deviation is 2 cm. The cylinder is only valid if its length ranges from 51 cm to 60 cm. A random sample has been randomly chosen out of 1000 cylinders. How many cylinders are expected to be valid?

Solution

Let X be a normal random variable expressing the cylinder length:

$\therefore$ The probability of (the cylinder is valid) $= P(51 < X < 60)$

$= P(\frac{51 - 56}{2} < Z < \frac{60 - 56}{2})$

$= P(-2.5 < Z < 2)$

$= P(-2.5 < Z \leqslant 0) + P(0 \leqslant Z < 2)$

$= 0.4938 + 0.4772 = 0.9710$

$\therefore$ The number of cylinders expected to be valid= 1000 □0.9710 = 971 cylinders

Try to solve

(1) Income: If the salaries of a 200- worker group at a factory follow a normal distribution whose mean is 175 LE and its standard deviation is 10 LE. How many workers do their salaries range from 170 LE to 180 LE?.

Materials
- Scientific calculator.

Example

(2) Education: If the marks of the students at a school are a normal random variable whose mean $\mu = 44$ and its standard deviation is σ where 22.66% of students have got more than 50 marks, find the value of σ.

Solution

Let X be the normal random variable expressing the marks of the students

$\therefore P(X > 50) = \frac{22.26}{100}$

$\therefore\ P(Z > \frac{50 - 44}{\sigma}) = 0.2266$

$\therefore P(Z > K) = 0.2266$ where $K = \frac{6}{\sigma}$, $K > 0$

$\therefore P(0 \leqslant Z < K) = 0.5 - 0.2266 = 0.2734$

$\therefore K = 0.75$ $\therefore \frac{6}{\sigma} = 0.75$ $\therefore \sigma = \frac{6}{0.75} = 8$

Try to solve

(2) If the marks of the students in an exam follow a normal distribution whose mean is 60 and its standard deviation is 12 and a student has been randomly chosen, find the probability that the mark of that student is between 66 , 75 marks. If 15% of the excellent students have got an Excellent rank, find the least mark of the student getting an Excellent rank.

Example

(3) Length: If the lengths of the students at a high school follow a normal distribution whose mean $\mu = 160$ cm and its standard deviation $\sigma = 5$ cm, find the probability that the length of any student differs from μ not more than 8 cm .

Solution

Let X be a normal random variable expressing the lengths of the student and the length difference from $\mu = | x - \mu |$" i.e. the absolute difference between the length and the mean μ "

$\therefore P(|X - \mu| < 8) = P(|X - 160| < 8)$

$\therefore P(-8 < X - 160 < 8)$

$= P(152 < X < 168)$

$= P(\frac{152 - 160}{5} < Z < \frac{168 - 160}{5})$

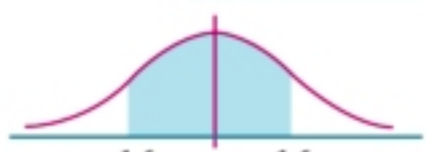
$= P(-1.6 < Z < 1.6)$

$= 2 \square P(0 \leqslant Z < 1.6)$

$= 2 \square 0.4452 = 0.8904$

Remember

The expression:
$|x - a| < b$
is equivalent to the expression:
$-b < x - a < b$
I.e: $a - b < x < a + b$



Try to solve

(3) Weights: If the weights of the students at a primary school follow a normal distribution whose mean is 30 kg and its standard deviation is 5 kg, calculate the percentage of the number of the students whose weights are more than 45 kg and so is the percentage of the number of the students whose weights range between 25 kg and 35 kg.

Example

(4) Work: If the wages of the workers at a factory follow a normal distribution whose mean $\mu = 75$ LE and its standard deviation $\sigma = 10$, find:

a The percentage of the workers whose wages are more then 90 LE

b The percentage of the workers whose wages are less then 55 LE

c The percentage of the workers whose wages range between 60 LE and 80 LE.

Solution

a $\because P(X > 90) = P(Z > \frac{90 - 75}{10})$

$= 0.5 - P(0 \leqslant Z \leqslant 1.5) = 0.5 - 0.4332 = 0.0668$

$\therefore$ The percentage of the workers whose wages are more then 90 LE = 6.68%

b $\because P(X < 55) \quad = P(Z < \frac{55 - 75}{10}) \quad = P(Z < -2)$

$= 0.5 - P(0 \leqslant Z \leqslant 2) \quad = 0.5 - 0.4772 = 0.0228$

$\therefore$ The percentage of the workers whose wages are less then 55 LE = 2.28% of the total number

c $\because P(60 \leqslant Z \leqslant 80) \quad = P(\frac{60 - 75}{10} \leqslant Z \leqslant \frac{80 - 75}{10})$

$= P(-1.5 \leqslant Z \leqslant 0.5) = P(0 \leqslant Z \leqslant 1.5) +$

$P(0 \leqslant Z \leqslant 0.5) = 0.1915 + 0.4332 = 0.6247$

$\therefore$ The percentage of the workers whose wages range between 60 LE and 80 LE = 62.47% of the total number of the workers at the factory.

Try to solve

(4) Let the marks of an exam be a normal variable by expectation 76 and standard deviation 15 marks. By ordering the excellent students getting a mark higher than α mark, they represent 15% of the total students. By ordering the students getting marks lower than β mark, they represent 10% of the total students. Find:

a The least mark α to consider the student belonging to excellent .

b The failing mark β .

Exercises 4 - 2

1. If the salary of 1000 families in a city is a normal random variable whose mean is 170 LE, its standard deviation is 20 LE, and a family has been randomly chosen, find:
   a. The probability the salary is included between 160 LE and 200 LE .
   b. The number of families whose salaries are more than 150 LE.

2. If the weights of the students at a faculty follow a normal distribution whose mean is 68.5 kg and its standard deviation is 2.5 kg.
   a. calculate the percentage of the number of the students whose weights range between 67.5 kg and 71 kg.
   b. If the number of the students is 1000 students, calculate the number of the students whose weights are more than 71 kg .

3. A sample of 200 students at a school has been randomly taken. If their ages represent a normal random variable whose mean is 16.6 and its standard deviation is 1.2, find the number of the students whose ages are less than 16 years of this sample .

4. If the lengths of 2000 students at a faculty follow a normal distribution whose mean is 170 cm and its standard deviation is 8 cm, find the number of students whose lengths are less than 176 cm .

5. If the salary of 300 families represents a random variable x following the normal distribution by expectation μ = 500 LE and standard deviation σ = 20 L.E, find
   a. The number of the families getting a salary more than 350 LE .
   b. The maximal salary of 4% of the families getting the lowest salaries .

6. If the salary of 200 families is a random variable x following a normal distribution by expectation μ = 400, standard deviation σ = 80 LE and a family has been randomly chosen, find:
   a. The probability the salary of the family is more than 500 LE at maximum
   b. The number of the families getting a salary 500 LE at maximum .

7. If the life time (in hours) of a type of batteries is a random variable following a normal distribution whose mean is 2000 hours and its standard deviation is 120 hours; What is the probability the battery would keep working for more than 1800 hours?

8. If the salary of a 500 - employee group follows a normal distribution whose mean is 180 LE and its standard deviation is 15 LE, find the numbers of employees whose salaries are less than 198 LE.

9. If the rainwater rise during February follows a normal distribution whose mean $\mu = 3$ cm and its variance $\sigma^2 = 4$ cm^2, find the probability the rainwater rise in February next year:

   a. More than 1 cm
   b. Between 3.5 cm and 4 cm

10. If the temperature in August follows a normal distribution whose mean $\mu = 35$ degrees and its standard deviation $\sigma = 5$ degrees, find the probability the temperature on a day during this month will be

   a. Between 28 degrees and 38 degrees.
   b. More than 39 degrees .
   c. Between 26 degrees and 32 degrees.

11. 1000 adults have been applied to the enlisting management. If their lengths follow a normal distribution whose mean is 170 cm and its standard deviation is 10 cm, find the number of the adults:

   a. Whose lengths are less than 190 cm
   b. Unaccepted if the minimal required length is 155 cm

12. It is found that the lengths of a certain type of plants are distributed in regard to a normal distribution whose mean is 50 cm and its standard deviation is σ . If it is known that the lengths of 10.56% of these plants are less than 45 cm, find the variation of the lengths of these plants.

13. If the weights of the students in a faculty follow a normal distribution whose mean is 65 kg and its standard deviation is σ . If the weights of 33% if the students are more than 70 kg.

   a. Find the value of σ
   b. If the number of the students is 100 students, calculate the number of the students whose weights are less than 67.5 kg

14. If the weights of the students in a faculty follow a normal distribution whose mean is 68.5kg and its standard deviation is 2.5 kg:

   a. Calculate the percentage of the students whose weights range between 67.5 kg and 71kg .
   b. If the number of the students is 1000 students, calculate the number of the students whose weights are more than 71 kg.

15. If the marks of the students at a school are a normal random variable whose mean $\mu = 42$ and its standard variation is σ where 26.11% of the students got more than 50 marks, find the value of σ.

(16) In a math exam, the marks of the students have a normal distribution whose mean is 70 and its standard deviation is 5, find the number of the students whose marks are more than 78 known that the number of the students did the exam are 100 students .

(17) A factory produces cylinders of lengths follow a normal distribution whose mean is 56 cm and its standard deviation is 2 cm. The produced cylinders are valid if only their lengths are included between 51 cm and 60 cm. A random sample of 1000 cylinders has been taken. How many cylinders are expected to be valid?

(18) If the radius lengths of the cylinders produced by a factory follow a normal distribution whose mean is 25 cm and its standard deviation is 20 cm. The cylinder is invalid if its radius length is less than 20 cm or more than 28 cm. If a cylinder has been randomly chosen, find the probability the cylinder is invalid.

(19) If the weights of a group of the experimental animals follow a normal distribution whose mean is μ gm and its standard deviation is 10 gm and known that $P(x \geqslant 180) = 0.1587$, calculate the mean μ

(20) If the marks of the students in an exam represent a random variable following a normal distribution whose mean is μ and its standard deviation is σ, find:

a The probability the students get a mark more than $(\mu - \sigma)$.

b The percentage of the students who get marks included between: $(\mu - 2\sigma)$ and $(\mu + 2\sigma)$.

(21) It is found that the lengths of a certain type of plants are distributed in regard to a normal distribution whose mean is μ and its standard deviation is 4 . If it is known that the lengths of 10.56% of these plants are less than 45 cm, find the mean μ of the lengths of these plants

(22) If the temperature in January follows a normal distribution whose mean is 16 degrees and its standard deviation is 4 degrees, find the probability the temperature on a day during this month will be:

a Between 14 degrees and 20 degrees.

b More than 15 degrees.

(23) In a community, it is found that the intelligence follows a normal distribution whose mean is 104.6 and its standard deviation is 6.25,

a Find the ratio of the individuals whose intelligence ranges between 90 and 120

b Find the ratio of the individuals whose intelligence is more than 110.

Unit summary

Normal random variable

The range of the continuous random variable x is identified by the interval $]-\infty , \infty[$ and its probability density function is represented by a bell-like curve. The shape of the curve is identified by knowing two values: the mean μ and the standard deviation σ.

Some properties of the normal curve

1. It has one top and its two ends extends to $-\infty , \infty$.
2. It has a symmetrical axis passing through the top and intersecting the horizontal axis when $X = \mu$.
3. The area of the region placed under the normal curve and above the X axis equals 1.
4. From symmetry, we find that the straight line $X = \mu$ divides the area placed under the curve and above the X axis into two regions; the area of each region = 0.5.
5. The approximate area of the region under the curve and above the X axis can be calculated in regard to the following intervals:

- From $\mu - \sigma$ to $\mu + \sigma$ = 68.26 % of the total area .
- From $\mu - 2\sigma$ to $\mu + 2\sigma$ = 95.44 % of the total area .
- From $\mu - 3\sigma$ to $\mu + 3\sigma$ = 99.74 % of the total area .

The standard normal distribution

If the probability distribution of the random variable x is the normal distribution by a mean μ and standard deviation σ , then .$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ is the standard normal distribution whose expectation is zero and its standard deviation = 1.

Properties of the density function of the standard normal distribution(Z):

1. The curve is located above the horizontal axis.
2. It is symmetrical in terms of the vertical axis.
3. The two ends of the curve extends infinitely without getting converged with the horizontal axis.
4. The area of the region under the curve and above the horizontal axis = 1.
5. From the symmetry, we find that the vertical axis divides the region under the curve and above the horizontal axis into two regions of area = 0.5 for each.
6. The approximate area of the region located off under the standard curve only and above any interval [a , b] by special tables can be calculated.

The tables of the area under the standard normal distribution curve:

To convert the normal distribution variable X into standard normal distribution variable Z, you use the relation:

$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$, from the table of the standard normal distribution attached at the end of the book, you can find the required area.

General exercises

1. Prove that for any normal distribution of a random variable x whose mean is μ and its standard deviation is σ, $P(x \geqslant \mu + 2\sigma) = 0.0228$

2. If x is a normal variable whose mean is μ and its variance is 64, find the value of μ if $P(x < 70) = 0.17$

3. Find σ if known $P(x < 37.25) = 0.0446$ and $\mu = 50$

4. If x is a normal random variable whose mean $\mu = 16$ and its standard deviation $\sigma = 4$, find the value of each :

   a. $P(x \leqslant 19)$ b. $P(9 \leqslant x \leqslant 20)$ c. $P(x \geqslant 10)$

5. If x is a normal random variable whose mean is μ, its standard deviation is σ, $P(x < 19) = 0.7734$ and $P(x > 10) = 0.9332$, find the value of μ and σ.

6. If x is a normal random variable whose mean is μ and its standard deviation is σ, find the value of each :

   a. $P(\mu - 2\sigma \leqslant x \leqslant \mu + 2\sigma)$
   b. $P(\mu - 1.35\sigma \leqslant x \leqslant \mu - 0.7\sigma)$ then calculate the value of each μ and σ

7. If x is a normal random variable whose mean is μ and its standard deviation is σ and:

   a. $P(x > 45) = 0.0228$, $\sigma = 10$ find μ
   b. $P(x \geqslant 15) = 0.8413$, $\sigma = 5$ find μ
   c. $P(x < 55) = 0.3085$, $\mu = 60$ find σ

8. If x is a normal variable whose mean is 50 and its standard deviation 10, find:

   a. $P(x > 70)$ b. The value of k if $P(x < K) = 0.1587$

9. If x is a random variable of a normal distribution whose mean is 100 and its standard deviation is 4,

   a. If $P(x > a) = 0.5636$ find the value of a
   b. Find $P(x < 90)$
   c. Find $P(x > 108)$
   d. Find $P(95 < x < 105)$

10. If x is a normal random variable whose mean is μ, its standard deviation $8 = \sigma$ and $P(x \leqslant 40) = 0.1587$, find :

    a. The value of the mean b. $P(x > 50)$

11. If Z is a standard random variable and:

    a. $P(Z > K) = 0.1056$ find the value of k
    b. $P(-0.44 \leqslant Z \leqslant K) = 0.5588$ find the value of k

12 If x is a normal random variable whose mean is μ and its standard deviation is σ, find:

a $P(x > \mu)$

b $P(x < \mu)$

c $P(\mu - \sigma \leqslant x \leqslant \mu + \sigma)$

d $P(x > \mu + 2\sigma)$

e $P(\mu - \sigma \leqslant x \leqslant \mu + 2\sigma)$

f $P(\mu - 0.5\sigma \leqslant x \leqslant \mu + 0.5\sigma)$

13 If x is a normal variable whose mean is μ, its standard deviation is σ and $a > 0$, find a where

a $P(\mu - a\sigma \leqslant x \leqslant \mu + a\sigma) = 0.6476$

b $P(\mu - a\sigma \leqslant x \leqslant \mu + a\sigma) = 2\,P(0 \leqslant Z \leqslant 1.48)$

14 If x is a normal variable whose mean is 75 and its standard deviation is 15, find the value of k if $P(x > K) = 0.15$

15 If x is a normal random variable whose mean is μ and its standard deviation is 5, find the value of μ which makes $P(x \leqslant 45)$ equals:

a 0.0228

b 0.9332

16 Weather: If the temperature within a month follows a normal distribution whose mean is 20° and its standard deviation is $3\frac{1}{3}^\circ$, find the probability the temperature is between 21° and 25°

17 Income: The daily wages of a 1000- employee group follow a normal distribution whose mean is 400 LE, standard deviation is 80 LE and an employee is randomly chosen, find :

a The probability the wage of an employee is less than 240 LE.

b The percentage of the employees whose wages are more than 300 LE.

c The number of employees whose wages are included between 260 LE and 340 LE.

18 Wages: If the wages of a 500-employee group follow a normal distribution whose mean is 60 and its standard deviation is 12, find the number of employees:

a Whose wages are not greater than 54.

b Whose wages are not less than 81.

19 Exams: If the marks of the students in an exam is a random variable following a normal distribution whose mean is μ and its standard deviation is σ, find:

a The probability the students get a mark more than $(\mu - \sigma)$

b The percentage of the students getting a mark included between $(\mu - 2\sigma)$ and $(\mu + 2\sigma)$.

For more activities and exercises www.sec3mathematics.com.eg

Accumulative test

(1) A box contains 15 balls; 5 red balls are numbered from 1 to 5 and 10 black balls numbered from 6 to 15. If a ball has been randomly drawn .

First : Calculate the probability for each of the following two events:

A The event the drawn ball is red or carries an odd number.

B The event the drawn ball is black and carries an even number.

Second : Are the two events A and B mutually exclusive? Explain.

(2) If X is a continuous random variable whose probability density function f(x), where:

$$f(x) = \begin{cases} K(2x-1) & \text{when } 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ \text{zero} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Find :

a The value of the constant k

b $P(X \geqslant 2)$

(3) In a study conducted about the relation between the monthly income X and the monthly savings Y in LE for a 20- family sample, the gathered data have revealed the following:

$\Sigma X = 3000$ $\quad \Sigma Y = 300$ $\quad \Sigma X^2 = 800000$

$\Sigma Y^2 = 5500$ $\quad \Sigma XY = 60000$

a Calculate the linear correlation coefficient between the income and the savings of the family .

b Find the regression line equation .

c Estimate the amount of money saved by a family whose monthly income is 2000 LE .

(4) If X is a discrete random variable and you have the next function:

$f(x) = \frac{x^2 + K}{18}$ where $x = -1, 0, 2, 3$

a Find the value of k which makes f(x) a probability distribution function of the variable X.

b Calculate the mean of the variable x.

c Find $P(X \leqslant 2)$.

(5) If A and B are two events of the sample space S for a random experiment and:

$P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = x$ and $P(A \cup B)' = \frac{1}{3}$

First: Find the value of x in each of the following two cases:

a A and B are two mutually exclusive events .

b $A \subset B$

Second: If $x = \frac{1}{4}$ find $P(A \cap B)$.

6. **Length:** If the lengths of a group of students follow a normal distribution whose mean is μ and its standard deviation is 8 cm, find the value of μ if the standard length of a 180 cm tall student is 1.25 .

7. **Production :** If x and Y are two variables representing the production in a company where x represents the size of the production, Y represents the wages of employees in thousand LE, and the next data about 6 years are shown as follows .

Size of production	1000	2000	2500	4000	2300	2500
Wages	150	200	150	700	180	200

Calculate the value of the rank correlation coefficient between the size of the production and wages, then show its type.

8. **Bonus:** If the distribution of the bonuses of the workers at a factory follows a normal distribution whose mean $\mu = 75$ LE, and its standard deviation $\sigma = 10$, find the percentage of the number of workers whose:
   - a) Bonuses are more than 90 LE.
   - b) Bonuses are less than 55 LE.
   - c) Bonuses are included between 60 LE and 80 LE.

9. **Weather:** If the temperature in January follows a normal distribution whose mean is 16 degrees and its standard deviation is 4 degrees, find the probability the temperature on a day within this month is.
   - a) Included between 14 degrees and 20 degrees
   - b) More than 15 degrees .

10. **Energy conservation:** At a factory for producing the saving electric lamps, it is noticed that the lifespan of the produced lamps per day follows a normal distribution whose mean is μ, its standard deviation is 20 days and the lifespan of 4.95% of the produced lamps is less than 100 days .
    - a) Find the value of μ
    - b) Within 10000 lamps of the produced lamps, estimate the number of the lamps whose lifespan ranges be 100 , 150 days.

Test 1

You may use the calculator and the area table:

Question 1:

(a) Complete the following sentences:

1. If A , B two events of sample space S for a random experiment where $P(B') = 0.6$, the value of $P(A' \cap B) + P(A) \times P(B \mid A) = $ ....

2. If Z is a standard normal variable where $P(K \leqslant Z \leqslant 1.5) = 0.03$, the value of K = ...

3. If A and B are two independent events of sample space S for a random experiment where $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.8$ then $P(A - B) = $ ....

4. If X is a discrete random variable, its expectation equals 5 , $\Sigma x_r^2 \cdot f(x_r) = 34$, then its standard deviation equals ....

5. If the regression line equation of y on x is $y = 0.2x + 3$ and the value table of y when x = 5 is 4.6 , than the error in the value of y = ...

(b) A and B are two events where $P(A) = 0.6$, $P(A' \cap B) = 0.2$, $P(A \cap B) = 0.3$ calculate:

a) $P(B \mid A)$ b) $P(A' \mid B')$

Question 2:

(a) The following table shows the marks of 6 students in a math exam (x) and statistics exam (y). calculate spearman's rank correlation coefficient between x and y and determine its type

x	Excellent	Pass	Good	Pass	Very good	Very good
y	Very good	Pass	Pass	Good	Good	Excellent

(b) If X is a normal random variable whose mean $\mu = 10$ and its standard deviation $\sigma = 2.5$

1. Find $P(X \leqslant 12.5)$

2. If $P(X \geqslant K) = 0.1056$, find the value of K.

Question 3:

(a) If x is a continuous random variable and :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{8} & \text{where} \quad 1 \leqslant x \leqslant 5 \\ \text{zero} & \text{otherwise} \end{cases}$$

1. Prove that f(x) the probability density function of the random variable X .

2. Calculate P (2 < x < 3)

(b) If the monthly income of 1000 families in a city is a normal random variable whose mean is 1700 LE and its standard deviation is 200 LE and a family is randomly chosen from these families, find the number of families whose monthly income is greater than 1500 LE.

Question 4 :

(a) If X is a discrete random variable whose range is { -2, -1 , 0 , 1, 2} and $P(X = r) = \frac{a + r}{15}$ for each r belongs to the range of x, find the value of a then find the standard deviation of the variable X.

(b) If : $\Sigma x = 49$, $\Sigma y = 45$, $\Sigma x^2 = 359$, $\Sigma y^2 = 303$, $\Sigma x\, y = 320$, n = 7

1. Calculate pearson's correlation coefficient between the values of x and y and determine its type.

2. Estimate the value of y when x=9 using the regression line

Test 2

You may use the calculator and the area table:

Question 1

(a) **Choose the correct answer:**

1. A regular die is rolled once, the probability of appearing the number 5 known that the number appeared is odd equals:

   a $\frac{1}{4}$ b $\frac{1}{3}$ c $\frac{1}{2}$ d $\frac{3}{4}$

2. If A and B are two events, $P(A \cap B) = 0.2$, $P(B) = 0.4$ then $P(A | B)$ equals

   a 0.5 b 0.06 c 0.14 d 0.1

3. The value of K in the following probability distribution is:

x_r	3	5	8
$f(x)_r$	k^2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

   a $\frac{1}{4}$ b $\frac{1}{2}$ c $\frac{3}{4}$ d 1

4. If the marks of students in a classroom in statistics exam follow a normal distribution whose mean is 76, its standard deviation is 5 and Ahmed has got 66 marks in this exam, then his mark in the standard form is:

   a 3 b -2 c 1 d 2

(5) The coefficient representing the strongest relation between two variables is:

(a) -0.58 (b) 0.48 (c) 0.68 (d) -0.78

(b) A box contains 9 balls identical in size and touch and they are numbered 0,1,2,......8. 2 balls are randomly drawn one after another without replacing. Calculate the probability:

(1) The first ball carries an even number and the second carries an even number, too. (getting 2 even numbers).

(2) The first ball carries an odd number and the second carries an even number.

Question 2:

(a) From the data of the following table :

x	150	180	150	120	120	100
y	120	120	100	80	80	100

Calculate spearman's rank correlation coefficient between x and y.

(b) If x is a discrete random variable whose probability distribution is as follows:

x_r	1	2	4	6
$f(x_r)$	0.2	a	0.4	0.1

Find the value of a, then calculate the mean and the standard deviation of the random variable x.

Question 3:

(a) If the salaries of a group of employees in a company follow a normal distribution whose mean is μ and its standard deviation $\sigma = 250$ LE and the percentage of the employees whose salaries are greater than 2150 LE is 97.72%, find the value of μ.

(b) If x is a continuous random variable, its probability density function is :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x + K) & \text{When} \quad 2 \leqslant x \leqslant 4 \\ \text{Zero} & \text{otherwise} \end{cases}$$

(1) Find the value of K

(2) Find $P(X < 3)$

Question 4 :

(a) If $\Sigma x = 40$, $\Sigma y = 30$, $\Sigma x^2 = 360$, $\Sigma y^2 = 200$, $\Sigma x\, y = 232$, $n = 5$ find :

(1) Pearson's linear correction coefficient between x and y.

(2) The regression line equation of y on x then estimate the value of y when x= 9

(b) If z is a standard random variable, find the value of K if : $P(z \geqslant K) = 0.1170$

Test 3

Question 1:

(a) Complete the following sentences:

1. If $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ then $P(A' \mid B')$ equals ....

2. If X is a random variable whose range is {0, 1, 2, 3, 4} and $P(X = 0) = P(X = 4) = \frac{1}{16}$, $P(X = 1) = P(X = 3) = \frac{1}{4}$ then $P(X = 2)$ equals ....

3. If X is a continuous random variable and the probability density function is :

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{when} \;,\; -3 \leqslant x \leqslant 3 \\ \text{Zero} & \text{otherwise} \end{cases}$$ then a equals ....

4. If A and B are two independent events , $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.6$ then $P(A \cup B) = x$ then

   $x =$ ....

5. If the lengths of a 1000 - people group follow a normal distribution whose mean is $176\frac{1}{2}$ and its standard deviation is 5 then the number of people whose lengths are greater than 185cm equals ....

(b) If A and B are two events of sample space for a random experiment S , prove that :
$P(B) = P(A) \times P(B \mid A) + P(A') \times P(B \mid A')$, then use this to calculate P (B)
If $P(A) = 0.6$, $P(B \mid A') = 0.8$, $P(B \mid A) = 0.3$

Question 2:

(a) If x is a continuous random variable and the probability density function is:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{24} & ,\; 2 \leqslant x \leqslant 5 \\ \text{Zero} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Calculate each of :

1. $P(3 \leqslant X \leqslant 5)$
2. $P(X \leqslant 4)$

(b) Find spearman's rank correlation coefficient between the two variables x and y from the data of the following table

x	10	16	15	17	18
y	5	7	8	6	9

Question 3:

(a) If x is a discrete random variable whose probability distribution is given by the function f where
$f(x) = \frac{x}{10}$, $x \in \{ 1, 2, 3, K\}$ find :

1. The value of K and write down the probability distribution of the random variable x
2. The expectation and variance of the random variable x

(b) If X x is a normal random variable whose mean $\mu = 50$, and its standard deviation is σ
Find σ If $P(X \leqslant 37.25) = 0.0446$

Question 4:

(a) To study the relation between the required amount (y) in kg and the price (x) in LE of a certain product, we have the next data:
$\Sigma x = 25$, $\Sigma y = 30$, $\Sigma x y = 181$,
$\Sigma x^2 = 155$, $\Sigma y^2 = 249$, $n = 5$ find:

1. Pearson's correlation coefficient between x and y
2. The regression coefficient of the amount required by the price.

(b) If $P(B \mid A) = \frac{2}{3}$, $P(B \mid A') = \frac{5}{8}$, $P(A) = \frac{3}{4}$ find $P(A \cup B)$

Test 4

Question 1:

(a) Choose the correct answer:

1. A box contains 15 lamps out of them 5 lamps are defective. If two lamps are drawn one after another without replacing, the probability the two lamps are defective is:

   a $\frac{1}{3}$ b $\frac{2}{5}$ c $\frac{2}{7}$ d $\frac{2}{21}$

2. If A and B are two events of sample space for a random experiment S and $A \subset B$ then $P(B/A)$ equals

   a P(A) b P(B) c P(A -B) d P(S)

3. If all the points in a scatter diagram lie on a straight line, the correlation coefficient between the two variables equals:

   a ± 1 b 0 c $\frac{1}{2}$ d $\frac{3}{4}$

(4) The value of R in the following probability distribution is :

x_r	-2	-1	1	2
$f(x_r)$	3R	$\frac{1}{4}$	2R	$\frac{1}{3}$

a $\frac{5}{7}$ b 1 c $\frac{1}{12}$ d $\frac{1}{3}$

(5) If the probability distribution function of the random variable x is K

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} , & 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ \text{Zero} & \text{otherwise} \end{cases}$$

then $P(X < 2) =$ ....

a $\frac{2}{3}$ b $\frac{1}{3}$ c $\frac{3}{4}$ d 1

(b) A and B are two events of sample space S for a random experiment , $P(A') = \frac{1}{4}$, $P(B' \mid A) = \frac{2}{5}$, calculate $P(A \cap B)$

Question 2:

(a) If x is a discrete random variable whose probability distribution is as follows:

x_r	0	1	2	3	4
$f(x_r)$	0.25	0.2	0.1	0.3	0.15

Find the mean and the standard deviation of the random variable X.

(b) In an experiment of rolling a regular die two consecutive times and observing the number appeared on the upper face in each time. Calculate the probability of occurring the following events:

(1) The appearance of two numbers their sum is greater than 8

(2) The appearance of two numbers the absolute difference between them is less than 2 in a condition their sum is greater than 8

Question 3:

(a) The next table shows the grades of six students in math and physics exams:

Grades in physics	Pass	Good	Excellent	Weak	Very good	Good
Grades in math	Pass	Very good	Very good	Pass	Excellent	Weak

Calculate spearman's rank correlation coefficient and show its type.

(b) If x is a continuous random variable whose probability density function is:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\ (x + a) \text{ where } & 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ \text{Zero} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Find the value of a, then calculate $P(\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2})$

Question 4:

(a) If the mean of a random variable equals 150 and the coefficient of variation equals 2%, find the variance of this random variable.

(b) In a study to find the relation between the weight x in kg and the length y in cm for six people, it is found that:

$\Sigma x = 374$, $\Sigma y = 913$, $\Sigma x^2 = 24364$,

$\Sigma y^2 = 193624$, $\Sigma xy = 52260$ find:

1. Pearson's linear correlation coefficient between x and y
2. The regression line equation of y on x.

Test 5

Question 1:

(a) Choose the correct answer:

1. If $P(A') = 0.3$, $P(b) = 0.4$, $P(A \cap B) = 0.2$ then $P(A \mid B') =$

   a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{6}$ c) 1   d) $\frac{3}{4}$

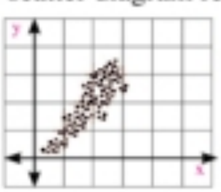
2. The coefficient representing the strongest correlation between the two variables is:

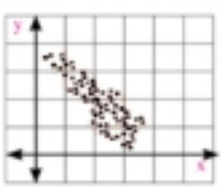
   a) -0.2   b) 0.1   c) -0.8   d) 0.7

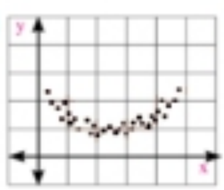
3. If x is a random variable whose range is { 1, 2, 3, 5} , and $P(x = 1) = 2\,P(x = 2) = \frac{1}{4}$, $P(x = 3) = \frac{7}{16}$ then $P(x = 5)$ equals:

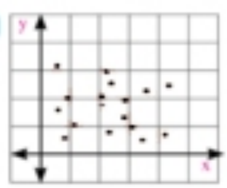
   a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{3}{16}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{11}{16}$

4. The scatter diagram representing a direct correlation is figure

   a) 

   b) 

   c) 

   d) 

5) If there is a relation between two variables x and y $\Sigma X_r \cdot f(x_r) = 4$, $\Sigma x_r^2 \cdot f(x_r) = 25$ then the coefficient of variation equals:

a) 16٪ b) 75٪ c) 64٪ d) 15.6٪

(b) If A and B are two independent events of sample space S for a random experiment , $P(A) = 2P(B) = x$, $P(A \cup B) = \frac{7}{9}$ find the value of x.

Question 2:

(a) If x is a continuous random variable whose probability density function is:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{32}(x+4) \text{ where } & -K \leqslant x \leqslant K \\ \text{Zero} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Find:

1) The value of K 2) $P(x \leqslant 0)$ 3) $P(-2 \leqslant x \leqslant 2)$

(b) The following table shows the grades of eight university students in math and physics exams:

Grades in math(x)	Excellent	Good	Very good	Very good	Weak	Excellent	Pass	Very good
Grades in physics(y)	Very good	Very good	Good	Excellent	Pass	Excellent	Pass	Excellent

Find spearman's rank correlation coefficient among the marks of math and physics and determine its type.

Question 3:

4) If the weights of the students at a university follow a normal distribution whose mean is 55kg, its standard deviation is σ and the weights of 33 % of the students are greater than 66kg, find:

1) The standard deviation

2) If the number of the students is 10000, calculate the number of the students whose weights are less than 60 kg.

(b) If x is a discrete random variable whose mean $\mu = 3$ and its probability distribution is as follows:

x_r	zero	K	3	4
$f(x_r)$	m	$\frac{1}{6}$	4m	5m

Find:

1) The value for each of M and K

(2) The standard deviation and the coefficient of variation of variable x.

Question 4:

(a) a box contains five identical cards numbered from 1 to 5. Two cards are drawn one after another with replacing. Find the probability:

(1) The sum of the two numbers on the two cards is a prime number.

(2) The product of the two numbers is less than seven if their sum is a prime number.

(b) In a study to show the relation between two variables x and y, we have got the following results:

$n = 10, \Sigma x = 35, \Sigma y = 60, \Sigma xy = 187$

$\Sigma x^2 = 134, \Sigma y^2 = 406$ find:

(1) K

(2) The regression line equation of y on x.

(3) Pearson's linear correlation coefficient between x and y, then determine its type.

Test 6

Question 1:

(a) Choose the correct answer:

(1) The strongest correlation coefficient of the following is:

a 0.7 b 1.2 c -0.9 d -0.3

(2) If x is a random variable whose range is {1, 2, 3} then the function representing the probability distribution function is:

a $f(x) = \frac{x+2}{8}$ b $f(x) = \frac{x+1}{3}$ c $f(x) = \frac{x}{6}$ d $f(x) = \frac{2x+3}{6}$

(3) In an experiment of rolling a regular die once, the probability of appearing an odd number if a number less than 4 appeared is:

a $\frac{1}{4}$ b $\frac{2}{3}$ c $\frac{3}{4}$ d $\frac{1}{2}$

(4) If A and B are two independent events , $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.6$ then $P(A \cup B) =$ ....

a 0.3 b 1.1 c 0.8 d 0.1

(5) If x is a normal variable whose mean $\mu = 6$ and its standard deviation $\sigma = 3$ then the variable subjected to a standard normal distribution is:

a $\frac{6-X}{3}$ b $\frac{X-3}{6}$ c $\frac{X-6}{3}$ d $\frac{3-X}{6}$

(b) If A and B are two events of a sample space for a random experiment , $P(A') = 0.6$, $P(B) = 0.3$, $P(A \cup B) = 0.9$ calculate $P(A \mid B')$

Question 2:

(a) The next table shows the grades of six students in math(x) and statistics (y) exams:

x	Good	Very good	Weak	Excellent	Pass	Weak
y	Pass	Weak	Good	Pass	Very good	Excellent

Calculate spearman's rank correlation coefficient and show its type .

(b) If x is a continuous random variable

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{18}(x + 2) \text{ where } & -2 \leqslant x \leqslant 4 \\ \text{Zero} & \text{otherwise} \end{cases}$$

First: prove that f(x) is the probability density function of the random variable x:

Second: Find $P(0 \leqslant x \leqslant 2)$

Question 3:

(a) If x is a normal random variable whose mean is μ and its standard deviation is σ calculate:

1. $P(\mu \leqslant x \leqslant \mu + \sigma)$
2. $P(\mu - \frac{7}{4}\sigma \leqslant x \leqslant \mu + \frac{7}{4}\sigma)$
3. $P(x - \mu \leqslant 1.8\sigma)$

(b) If x is a discrete random variable whose probability distribution is as follows:

x_r	-1	0	1	2	4
$f(x_r)$	2P	P	3P	2P	P

Find the value of P, then calculate the mean and variance of the random variable x.

Question 4:

In a study to show the relation between two variables x and y, If know that:

$\Sigma x = 540$, $\Sigma y = 460$, $\Sigma x^2 = 37112$

$\Sigma y^2 = 28252$, $\Sigma xy = 30782$, $n = 8$

First: Calculate Pearson's linear correlation coefficient between x and y.

Second: Estimate the value of y when x=30 using the regression line equation.

Test 7

Question 1:

(a) Complete the following:

1. If the two points (6,5) and (3,8) lie on the regression line y on x, then the type of the correlation between x and y is ....
2. If x is a random variable whose range is { -1, 0, K} , and its probability distribution function is $f(x) = \frac{x+2}{4}$ then K = ...
3. If $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$, $P(A') = \frac{1}{4}$ then $P(B \mid A) =$ ....
4. If A and B are two independent events, P(A) = 0.4 , $P(A \cup B) = 0.58$, then P (B) = ...
5. If x is a normal variable whose mean $\mu = 4$ and its variance = 25 , then $P(x \geqslant 14) =$ ....

(b) If x is a random variable whose mean $\mu = 55$ and its standard deviation is σ find the variance satisfying: $P(x \leqslant 45) = 0.228$.

Question 2:

(a) If x is a discrete random variable whose range is { -3, -2, 1, 2} , $P(x = -3) = P(x = -2) = \frac{1}{8}$, $P(x = 2) = \frac{1}{2}$, Calculate:

First: P(x = 1) **second**: the expectation, variance of the random variable x.

(b) The following table shows the grades of six students in math and chemistry exams

Grades in math	Very good	Weak	Pass	Good	Excellent	Pass
grades in chemistry	Pass	Good	Very good	Pass	Weak	Excellent

Calculate spearman's rank correlation coefficient and determine its type.

Question 3:

(a) If x is a continuous random variable whose probability density function is:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{24}x + K & \text{where } 1 \leqslant x \leqslant 5 \\ \text{Zero} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Calculate the value of K, then find $P(2 \leqslant X \leqslant 4)$

(b) If it is known that the probability the weather is going to be rainy is 0.24, the probability it is stormy is 0.36 and the probability it is rainy and stormy is 0.14, calculate the probability of the following events:

First: the weather is either rainy or stormy.

Second: the weather is rainy where it is not stormy.

Question 4:

(a) In a study to show the relation between two variables x and y, if known that:
$\Sigma x = 477$, $\Sigma y = 222$, $\Sigma xy = 15184$, $\Sigma x^2 = 32593$, $n = 7$
find the regression line equation y on x then estimate the value of y when $x = 100$.

(b) If x is a normal random variable whose mean is μ, its standard deviation $\sigma = 8$, $P(x > 64) = 0.0668$ calculate the mean μ.

Test 8

Question 1:

(a) Choose the correct answer

1. If the regression line equation y on x is $y = 0.2x+3$, then the expected value of y when $x = 5$ is:

   a) 0.2 b) 3.2 c) 3 d) 4

2. If x is a random variable and the expectation equals 3, $\Sigma x_r^2 \cdot f(x_r) = 14.5$ then standard deviation equals:

   a) 11.5 b) 5.5 c) 4.8 d) 2.35

3. If $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A - B) = \frac{3}{8}$ then $P(B' \mid A) =$:

   a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{9}{32}$ d) $\frac{3}{16}$

4. If A, B two independent events, $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3$ then $P(B - A)$ equals

   a) 0.9 b) 0.3 c) 0.18 d) 0.12

5. If Z is a standard normal variable, Then : $P(Z \geqslant 1.5)$ equals to the nearest two decimals :

   a) 2.23 b) 1.51 c) 0.07 d) 1.21

(b) In an experiment to roll two different dices once, calculate the probability the sum of the two numbers appeared on the two upper faces is an odd number known that the number appeared on the first upper face is 4

Question 2:

(a) If X is a continuous random variable whose probability density function is :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}(2x+1) & \text{where } 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ \text{Zero} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Calculate: **First**: $P(x \leqslant 2)$ **Second**: $P(1 \leqslant x \leqslant 2)$.

(b) The following table shows the marks of six students in math and statistics exams

Marks in statistics	22	25	19	24	25	13
Marks in math	45	35	40	28	40	25

Calculate spearman's correlation coefficient between the marks of math and statistics then show its type.

Question 3 :

(a) In a math exam, the marks of the students have been followed a normal distribution whose mean is 70 and its standard deviation is 5. Calculate the number of students whose marks are probably greater than 78 if it is known that the number of students applied to this exam is 10000.

(b) If x is a random variable whose probability distributions is as follows:

x_r	-2	-1	0	3	4
$f(x_r)$	$\frac{1}{4}a$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}a$	$\frac{3}{8}$

Find the value of a, then find the mean and variance of the variable x.

Question 4:

(a) In a study to show the relation between two variables x and y, we have got the following results:

$n = 7$, $\Sigma x = 147$, $\Sigma y = 99$, $\Sigma xy = 2123$, $\Sigma x^2 = 3430$

(1) Find the regression line equation y on x (2) Estimate the value of y when $x = 20$

(b) If A and B are two independent events $P(A) = 0.6$, $P(A - B) = 0.36$ calculate $P(A \cup B)$

Test 9

Question 1:

(a) Complete the following:

(1) If $P(A`) = \frac{2}{5}$ and $P(B| A) = \frac{1}{2}$ then $P(A \cap B) =$ ....

(2) If the probability distribution of the random variable x is:

x_r	-1	0	2
$f(x_r)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Then the expectation equals ....

3. If A and B are two independent events of S , P (B') = 0.4 and P (A ∪ B) = 0.8 then P (A) = ...

4. In the regression line equation y on x: y = bx + a. If the coefficient of x is less than zero, then the correlation between the two variables x and y is ....

5. If x is a normal random variable whose mean is 75 and its standard deviation is 4, then P (X < 85) = ...

(b) A 42 -student classroom; 28 study English, 21 study Italian and 7 study both languages. A student is randomly chosen. Calculate the probability the student chosen studies:

First: Both languages **Second**: English if he (she) is already studying Italian

Question 2:

(a) From the data of the following table

x	9	12	11	14	10	12
y	15	20	19	23	17	18

First: Calculate spearman's correlation coefficient and show its type.

Second: Use the regression line to estimate the value of y and calculate the error when x = 11

(b) If A and B are two events of a sample space of a random experiment P(B'|A) = 0.4 , P (A |B) = 0.3 and P(A) + P (B) = 0.36 find P(A) and P (A ∪ B)

Question 3:

(a) If x is a continuous random variable

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x & \text{where } 3 \leqslant x \leqslant 5 \\ \text{Zero} & \text{otherwise} \end{cases}$$

First: Prove that f(x) is a density function of the random variable x

Second: find P (x > 4)

(b) If x is a normal random variable whose mean $\mu = 15$ and its standard deviation $\sigma = 5$, find:

1. P (12 < x < 17)
2. The value of K where P (X < K) = 0.3446

Question 4:

(a) If x is a discrete random variable whose range is $\{0, 1, 3, 5\}$, $P(X = 0) = \frac{1}{2}$, $P(x = 1) = \frac{1}{6}$ and $P(x = 3) = \frac{1}{4}$ find:

First: The probability distribution of the variable x

Second: The mean and the coefficient of variation of the variable x

(b) A box contains 7 white balls, 8 red balls and 5 black balls. Two balls are drawn respectively without replacing, calculate the probability:

First: The second ball is white if the first is white.

Second: The first ball is red if the second is red.

Test 10

Question 1:

(a) Choose the correct answer:

(1) If x is a random variable whose range is $\{0, 1, 2, 3\}$, $P(x=0)=\frac{1}{8}$ $P(x=2)=\frac{1}{2}$ and $P(x=3)=\frac{1}{4}$ then $P(x = 1)$ equals ....

a $\frac{1}{4}$ b $\frac{1}{8}$ c $\frac{1}{2}$ d 1

(2) If $P(A - B) = 0.04$, $P(A \cap B) = 0.1$ then $P(B' \mid A)$ equals:

a 0.3 b 0.5 c 0.04 d 0.8

(3) If A and B are two mutually exclusive events , $P(A) = 0.3$ and $P(B') = 0.4$ then $P(A \cup B)$ equals ....

a 0.3 b 0.7 c 0.9 d 0.6

(4) If x is a random variable whose mean $\mu = 45$ and its standard deviation $\sigma = 5$, then $P(x \geqslant 55)$ equals ....

a 0.4772 b 0.9772 c 0.0228 d 0.2386

(5) If the regression line equation y on x is : $y = 3-x$, then the correlation between the values of x and the values of y is:

a nihilistic b direct c inverse d perfect

(b) If the marks of students at a school follow a normal distribution whose mean $\mu = 42$ and its standard deviation is σ where 26.11% of students got more than 50 marks, find σ.

Question 2:

(a) Find spearman's correlation coefficient from the data of the following table and show its type:

x	1	2	3	4	5	6
y	35	12	17	25	12	7

(b) If A and B are two events of a sample space of a random experiment $P(A \cup B) = 0.8$, $P(B) = 0.4$ and $P(A') = 0.3$ calculate $P(B' \mid A)$

Question 3 :

(a) x is a continuous random variable whose probability density function is

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x + K & \text{where } 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ \text{Zero} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Find the value of K, then find $P(1.5 \leqslant X \leqslant 2.5)$

(b) If A and B are two independent events of a sample space of a random experiment where A and B are two independent events, then $P(B) = 0.4$ and $P(A \cap B) = 0.24$ calculate $P(A \cup B')$ and $P(A \cup B)$

Question 4:

(a) Two regular dices; a number of 1.3 and 5 is written on each two opposite faces on the first die and a number of 2.4 and 6 is written on each two opposite faces on the second die. If the two dices are rolled and the random variable x expresses the sum of the two numbers appeared, find the probability distribution of the variable x and calculate the expectation and the coefficient of variation.

(b) The following data represent the expenditure y and the income x in LE per day of a sample.:

x	50	60	45	70	65	90
y	45	35	35	50	55	70

First: Estimate the expenditure if the income is 63

Second: Calculate the error when $x = 45$

Table of areas under the standard normal distribution curve

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0. 1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2160	0.2224
0.6	0.2259	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3815	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998

Answer of the Exercises

Unit 1: Correlation and regression

Answers of exercises (1 - 1)

(1) d (2) d (3) b (4) c

(5) d (6) 0.9 $r \simeq 0.947$ direct

(7) 0.8857 (8) - 0.985 inverse

(9) 0.3375 direct (10) - 0.41 inverse

(11) - 0.74 inverse (12) $\simeq -0.91$ inverse

(13) 0.7285714 (14) 0.166 direct

(15) 0.8545 direct (16) 0.8661 direct

Answers of exercises (1 - 2)

(1) b (2) b (3) c (4) a

(5) d (6) d

(7) $y = 0.7 + 0.723\,x$,

$\simeq 9.376$

(8) a $\simeq 8.8592$ b $= 1.2868$

(9) a $\simeq 0.69999$ b $y = 2.8x - 12.4$

(10) a $y = 36.85 - 0.6333x$

b - 0.9237 inverse

(11) a - 0.915227 inverse

b $y = 94.493 - 9.5628\,x$

(12) a 0.76856 direct.

b $y = 8.4825 + 0.40381\,x$

c $y \simeq 28.67$ L.E

d 28 error = 3.37

(13) a $y = 1.35\,x - 0.375$

b $\simeq 944.63$.

Answers of general exercises

(1) a (2) c (3) d (4) d

(5) b (6) a

(7) $r \simeq 0.47$ direct

(8) $r \simeq 0.931$ direct

(9) $r \simeq 0.81$ direct.

(10) $r \simeq -0.41$ reverse

(11) $r \simeq 0.89337$

(12) a $r \simeq 0.55296$

b $y = 2.8223 + 0.3249\,x$ $y \simeq 5.096$

(13) $r \simeq 0.93$, $y^8 \simeq 11$

(14) a $y = 11.5483 - .2053\,x$

b $y \simeq 3.334858$

c error $= |3.334 - 4.77| \simeq 1.439$

Answer of the accumulative test

(1) a (2) c (3) c (4) a

(5) c (6) b

(7) If the sign is positive, the correlation is direct and if it is negative, the correlation is inverse.

(8) a $r \simeq -0.5211$

b $y^8 = 135.17 - x$,$y^8 \simeq 73.17$

c error $= |72 - 69.17| = 2.83$

(9) a $r \simeq -0.9426$

b $y^8 = 10.38 - 0.154\,x$

c 4.22

d error $\simeq 1.528$

Unit 2: Conditional probability

Answers of exercises (2 - 1)

(1) b (2) a (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{2}$

(5) a

(6) **First:** 0.21 **Second:** 0.89

Third: 0.525 **Fourth:** $\frac{19}{30}$

(7) $\frac{3}{5}$ (8) **First:** $\frac{2}{5}$ **Second:** $\frac{29}{35}$

(9) $\frac{2}{3}$ (10) **First:** $\frac{1}{6}$ **Second:** $\frac{1}{2}$

(11) 0.42

(1) **First:** $\frac{11}{15}$ **Second:** $\frac{3}{5}$ **Third:** $\frac{1}{3}$

(2) **First:** $\frac{1}{11}$ **Second:** $\frac{1}{4}$ **Third:** $\frac{4}{9}$

(3) $\frac{1}{4}$ (4) **First:** $\frac{1}{10}$ **Second:** $\frac{7}{16}$

(5) $\frac{3}{4}$

(6) **First:** $\frac{4}{11}$ **Second:** $\frac{5}{33}$ **Third:** $\frac{35}{132}$

(7) **First:** $\frac{26}{35}$ **Second:** $\frac{55}{113}$

(8) **First:** $\frac{5}{7}$ **Second:** $\frac{1}{2}$ **Third:** $\frac{13}{30}$

(9) **First:** $\frac{3}{4}$ **Second:** $\frac{1}{2}$

Third: $\frac{3}{16}$ **Fourth:** $\frac{13}{14}$

(10) **Activity:** **First:** $\frac{5}{6}$ **Second:** $\frac{2}{3}$

Answers of exercises (2 - 2)

(1) a , g , z are independent events.

b, d, h, o are dependent events

(2) c (3) b (4) d (5) $\frac{1}{12}$

(6) $\frac{1}{16}$ (7) a , b are two dependent events

(8) **First :** 0.2 **Second:** $\frac{2}{7}$

(9) $\frac{1}{4}$ (10) $\frac{1}{15}$

(11) **a** $\frac{3}{95}$ **b** $\frac{9}{190}$

c $\frac{15}{190}$ **d** $\frac{2}{95}$

(12) **First:** **a** 0.28 **b** 0.82

c 0.54 **d** 0.72

Second: $\frac{2}{5}$

Answers of general exercises

(1) c (2) b (3) d (4) c

(5) a (6) $\frac{1}{10}$ (7) $\frac{2}{5}$

(8) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{3}{8}$

(9) **a** $\frac{5}{96}$ **b** $\frac{15}{96}$ **c** $\frac{1}{16}$ **d** $\frac{3}{16}$

(10) $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$ 1

(11) **a** $\frac{1}{6}$ **b** $\frac{5}{9}$ **c** $\frac{4}{9}$

(12) **a** 0.48 **b** 0.92 **c** 0.8

(13) **a** $\frac{9}{65}$ **b** $\frac{24}{65}$ **c** $\frac{16}{65}$ **d** $\frac{16}{65}$

(14) **a** $\frac{1}{5}$ **b** $\frac{1}{4}$

(15) **a** $\frac{16}{25}$ **b** $\frac{3}{4}$ **c** $\frac{1}{5}$

(16) **a** $\frac{1}{4}$ **b** $\frac{2}{9}$

Answer of the accumulative test

(1) Zero (2) $\frac{1}{6}$ (3) $\frac{2}{5}$ (4) 1

(5) b (6) b (7) c (8) $-\frac{45}{56}$

(9) **a** $\frac{14}{15}$ **b** $\frac{1}{3}$ **c** $\frac{1}{5}$

(10) **a** $\frac{33}{95}$ **b** $\frac{21}{95}$ **c** $\frac{14}{95}$

Unit 3: Random variables and probability distribution

Answers of exercises (3 - 1)

(1) c (2) a (3) b (4) a

(5) d (6) d

(7) **a** $\frac{1}{8}$ **b** $\frac{1}{10}$ **c** $-\frac{4}{5}$ (8) 0.1

(9) m = 1

x_r	-2	0	2	4
$f(x_r)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

(10) a = 3

x_r	1	2	3	4
$f(x_r)$	$\frac{9}{54}$	$\frac{12}{54}$	$\frac{15}{54}$	$\frac{18}{54}$

(11) k = 5

x_r	1	2	3	4
$f(x_r)$	$\frac{8}{50}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{14}{50}$	$\frac{17}{50}$

(12)

x_r	-3	-1	1	3
$f(x_r)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

(13)

x_r	6	7	8	9	10
$f(x_r)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

(14)

x_r	1	2	3	4	5	6
$f(x_r)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

(1)

x_r	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$f(x_r)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

(2) Range of x = { 0, 1, 2, 3}

x_r	0	1	2	3
$f(x_r)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

(3) Activity :

x_r	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x_r)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

First: (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$

(c) $\frac{5}{6}$ (d) $\frac{15}{36}$

Second: The expected value is 7

Answers of exercises (3 - 2)

(1) b (2) b (3) c (4) $\mu = \frac{11}{3}$

$\sigma = \sqrt{5}$

(5) $\mu = -\frac{23}{24}$ $\sigma \simeq 2.51$

(6) $\mu = \frac{5}{12}$ $\sigma \simeq 1.55$

(7) **First:** a = 0.4

Second: $\mu = 3$ `$\sigma \simeq 1.55$

(8) $\mu = 2.6$ $^2\sigma = 0.96$

(9) **First:** $\frac{11}{16}$ **Second:** n = 2 , $\sigma^2 = 1$

(10) **First:** $r = \frac{1}{3}$

Second: Probability distribution:

x_r	- 3	Zero	3	6
$f(x_r)$	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$

$\mu = \frac{5}{3}$ $\sigma^2 \simeq 14.2$

(11) a = 6 , $\sigma^2 = 1.55$

(12) **First:** $C = \frac{13}{2}$

Second: $\mu = \frac{7}{3}$ $\sigma^2 = \frac{5}{9}$

(13) **First :** C = 18

Second: Coefficient of variation = 37.7 %

(14) **First:** m = - 1

Second: $\mu = \frac{5}{8}$, $\sigma^2 = \frac{135}{64}$

(15) **First:** $C = \frac{20}{19}$

Second: $\mu = \frac{23}{19}$, $\sigma^2 = 1.2$

(16) **First:** L (x = 0) = $\frac{1}{8}$ L (x = 2) = $\frac{5}{8}$

Second: Coefficient of variation = 132.3٪

(17) **First:** $a = \frac{1}{12}$ ` k = 3 **Second:** $\sigma = 1.15$

Answers of exercises (3 - 3)

(1) b (2) a (3) a

(4) **First:** $\frac{1}{4}$ **Second:** $\frac{7}{2}$

(5) **First:** $\frac{3}{4}$ **Second:** $\frac{5}{12}$

(6) **First:** d (x) Density function **Second:** $\frac{20}{27}$

(7) **First:** $\frac{4}{9}$ **Second:** $\frac{7}{9}$

(8) **First:** $a = \frac{1}{8}$ **Second:** $\frac{1}{2}$

(9) **First:** a = 0 **Second:** $\frac{1}{2}$

(10) **First:** $a = \frac{1}{4}$ **Second:** $\frac{1}{2}$

(11) **First:** k = 8 **Second:** $\frac{3}{16}$

(12) **First:** $\frac{1}{4}$ **Second:** $\frac{7}{2}$

(13) **First:** a = 1 **Second:** b = 2

Answers of the general exercises of unit 3

(1) g (2) a (3) a

(4)

x_r	- 3	- 1	0	1	3
$f(x_r)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{1}{9}$

(5) $\therefore$ m = - 1

x_r	-2	-1	1	2
$f(x_r)$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{6}{16}$

(6) $a = \frac{1}{7}$ $\frac{5}{14}$

(1)

x_r	1	2	3	4	5	6
$f(x_r)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

(2) **First:**

x_r	0	2	4
$f(x_r)$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$

Second: $\frac{7}{9}$

(3)

x_r	3	5	7	9	11
$f(x_r)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

$\mu = 7$, $\sigma \simeq 2.3094$

(4)

x_r	2	3	4	5	6	7	8
$f(x_r)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

$\mu = 5$, $\sigma \simeq 1.581$

(5) $b = \frac{1}{6}$, $a = 3$ $\sigma \simeq 1.08$

(6) **First:** $\frac{3}{8}$ **Second:** $\frac{27}{32}$

(7) **First:** $a = 2$ **Second:** $\frac{7}{16}$

Answers of the accumulative test of unit 3

(1) $\frac{5}{11}$ (2) 2.16 (3) 0.38 (4) 0.38

(5) **First:** $\frac{1}{3}$ **Second:** $\frac{2}{3}$

Unit 4: Normal distribution

Answers of exercises (4 - 1)

(1) a 0.3749 , 0.4922 b 0.0160 , 0.4484
c 0.516 , 0.901 d 0.9447 , 0.6971
e 0.0757 , 0.0669 f 0.1609 , 0.1337
g 0.0749 , 0.0202 h 0.8729 , 0.9898
i 0.7422 , 0.9222 j 0.3264 , 0.0548

(2) a 1.06 b -1.35 c 0.28 d 1.97
e - 0.85 f 1.32 g - 2.61
h - 0.84 i 0.65 j - 0.33

(3) a - 0.94 , 0.7818 b 2.04 , 0.2670
c 1.25 , 0.6524 d 1.83 , 0.9664
e 2.67 , 0.9154 f - 1.3 , 0.6766

(4) a $\sigma = 8$ b $\sigma = 7.5$ c $\mu = 40$
d $\mu = 60$ e $\mu = 50$ f 0.58
g $k = 38$ h $k = 80$ i $k = 52$

(5) a $k = 137.5$ b $\mu = 45$
c **First:** $k = 10.5$ **Second:** 0.8413
d 0.2902
e **First:** 1.91 **Second:** $k = 1.65$
f **First:** 0.1151 **Second:** 0.5403
g **First:** 0.0446 **Second:** 0.8185
h **First:** 0.8274 **Second:** 52.5
i **First:** 0.6247 **Second:** 0.8413
j **First:** 0.0401 **Second:** 0.6147
k **First:** 0.1056 **Second:** 10.5

Answers of exercises (4 - 2)

(1) 0.6247 , 841 families
(2) 49.67% , 159 students
(3) 62 students.
(4) 1547 students
(5) a 20 families b 465 L.E
(6) a 0.1056 b 179 families
(7) 0.9525 (8) 442 employees
(9) a 0.8413 b 0.0928
(10) a 0.6451 b 0.2119
c 0.2382
(11) a 977 young people
b 67 young people
(12) 16

1. a $\sigma = 11.36$ b 587 students
2. a 49.67 % b 159 students
3. $\sigma = 12.5$
4. 5 students
5. 971 cylinders
6. 0.8417
7. $\mu = 170$
8. a 0.8413 b 0.9544
9. $\mu = 50$
10. a 0.5328 b 0.5987
11. a 0.9835 b 0.1949
18. a 154 employees
    b 20 employees
19. a 0.8413 b 95.44 %

Answers of the general exercises of unit 4

1. 0.0228
2. $\mu = 77.6$
3. $\sigma = 7.5$
4. a 0.7734 b 0.8012 c 0.9332
5. $\mu = 16$, $\sigma = 4$
6. a 0.9544 b 0.1535
7. a $\mu = 25$ b $\mu = 20$
   c $\sigma = 10$
8. a 0.0228 b $K = 40$
9. a $a = 99.36$ b 0.0062
   c 0.0228 d 0.7888
10. a $\mu = 48$ b 0.4013
11. a 1.25 b 1.22
12. a 0.5 b 0.5
    c 0.6826 d 0.0228
    e 0.8185 f 0.3830
13. a $a = 0.93$ b $a = 1.48$
14. $K = 90.6$
15. a $\mu = 55$ b $\mu = 37.5$
16. 0.3153
17. a 0.0228 b 89.44 %
    c 187 employees

Answer of the accumulative test

1. First: a $\frac{2}{3}$ b $\frac{1}{3}$
   Second: Yes because their intersection is ϕ
2. a $\frac{1}{6}$ b $\frac{1}{2}$
3. a 0.8
   b $y = 0.0428571\ x + 8.571435$
   c $y = 94.29$
4. a $k = 1$ b $\frac{1}{9}2$
   c $\frac{4}{9}$
5. First: a $\frac{1}{6}$ b $\frac{2}{3}$
   Second: $\frac{1}{12}$
6. 170 cm
7. 0.52857 direct

اسئلة الفصل السادس

قارن بين :

١- العلاقات الاقتصاديه الداخليه و الخارجية .

٢- ميزان التجارة المنظورة و غير المنظورة .

١. **بم تفسر ......؟**

١. تمثل الاستثمارات المباشرة اهم صور انتقالات رءوس الاموال.

٢. سوء توزيع الدخل علي مستوي العالم .

٣. اختلاف رءوس الاموال علي حسب دوافعها .

" لقد اصبح مفهوم العولمة خاصة في مجال الاقتصاد من المفاهيم التي تسود العالم بأسره ، و قد صاحب ظهور هذا المفهوم عدة متغيرات في هياكل الانتاج العالمي ، كما فرضت تلك المتغيرات تحديات او متطلبات ينبغي أن تهتم بها الدول خاصة النامية.

في ضوء الفقرة السابقة صنف العبارات التالية الي :

أ- عبارات تمثل متغيرات مصاحبة لعملية العولمة .

ب- عبارات تمثل متطلبات ينبغي الوفاء بها لمواكبة العولمة .

١-تطوير التعليم ينبغي ان يتجه نحو الكم والكيف

٢-لابد من تحقيق التكامل بين اقتصاديات الدولة سواء على المستوى الثنائى أو الجماعى.

٣-لقد حدث العديد من التحويلات فى هياكل الانتاج.

٤-لقد زادت حركة رؤوس الأموال بين الاسواق المختلفة.

٥-تتعرض السلع المنتجة محليا إلى المنافسة الشديدة من السلع المستوردة.

٦-هناك ثورة فى مجال الأنتاج الزراعى والصناعى

٧-هناك منافسة شديدة على مستوى الأفراد والمجتمعات فى مجال التعليم والعمل والانتاج.

وضع الاقتصاد المعرفي ومستوي التقدم التكنولوجي في أفريقيا حاليا :

- لقد أصبح اقتصاد المعرفة ضرورة اقتصادية وتنموية بشكل عام، بل وضرورة مؤكدة للتعامل مع الاقتصادات العالمية. وتعد أفريقيا لاعباً محدود الدور في الاقتصاد المعرفي العالمي، حيث إن هناك فجوة كبيرة بين مؤشرات الاقتصاد المعرفي في أفريقيا وبقية دول العالم؛ فإن نصيب أفريقيا من الاقتصاد المعرفي العالمي محدود، وهنك عدد من الدول الافريقية التي حققت تقدما في هذ المجال مثل جنوب افريقي وموريشيوس وسيشل والمغرب.
- تحاول أفريقيا الدخول إلي مجال التنمية التكنولوجية والعلمية والابتكارات، ولكن المؤشرات تدل على وضع محدود لأدائها في هذا المجال.

مؤشرات عن الاقتصاد المعرفي في أفريقيا

- يشير الاتجاه العالمي إلى أن خدمات تكنولوجيا الاتصالات تنمو بمعدل سريع، تليها منتجات برامج الكمبيوتر .
- في معظم دول القارة يظل القطاع العام أكثر مستخدم لتكنولوجيا الاتصالات والمعلومات. وباستثناء دولة جنوب أفريقيا فإن قطاع الصناعة والقطاع المالي أكثر مستهلكين لتكنولوجيا الاتصالات.
- تعد جنوب أفريقيا أكبر سوق لتكنولوجيا الاتصالات والمعلومات في القارة، تليها دول الشمال الأفريقي.
- يكمن الأمل في إدراك الحكومات الأفريقية لضرورة وضع السياسات التي يمكن أن تساعد في التغلب على بطء الاتصال بالاقتصاد المعرفي العالمي.
- تقوم حكومات أفريقية عديدة حاليا بصياغة السياسات الوطنية لتكنولوجيا المعلومات، وتطوير الشراكات الإقليمية؛ وذلك لتمكين المناخ الاقتصادي، وسياسات التحرير الناشئة في القارة.
- هناك عدداً من الفرص تنتظر أفريقيا، وقد يحالفها الحظ وتتبع الاتجاه العالمي، كما أن هناك عدداً من التحديات وأوجه القصور التي تواجه القارة.
- وقد يمثل ذلك دافعاً لها للوصول إلى مستقبل أفضل، ويُذكِّر صانعي القرار بأن هناك الكثير من الأمور التي لا بد من الاهتمام بها والتركيز عليها .

دور مصر الاقتصادي في أفريقيا حاليا لمواجهة تحديات العولمة :

تحرص مصر على إعادة ترتيب أولويات سياستها الخارجية، بما يعيد التوازن في علاقاتها التي كانت سائدة على صعيد كثير من القضايا والملفات، وفي مقدمتها العلاقات المصرية – الأفريقية، التي أتاح غياب مصر عنها لقوى أخرى فرصة التسلل إليها، وتهديد مصالحها بها.

وتتمثل الأهداف الإستراتيجية في استعادة الدور الاقتصادي لمصر في أفريقيا وذلك من خلال:-

أ- زيادة حجم التبادل التجاري بين مصر والدول الأفريقية

ب- زيادة حجم الاستثمارات المصرية في أفريقيا

ويمكن صياغة الإستراتيجية على النحو التالي: "تهدف مصر إلى استعادة دورها الاقتصادي في أفريقيا من خلال زيادة حجم التبادل التجاري مع الدول الأفريقية وزيادة حجم الاستثمارات المصرية في أفريقيا استنادا إلى إقامة علاقات ثنائية قوية مع الدول الأفريقية والاستفادة من إنشاء منطقة التجارة الحرة مع التكتلات الاقتصادية الأفريقية تمهيدا لتحقيق التكامل وفقا للتخصص في الميزة النسبية فيما تملكه كل دولة من الدول الأفريقية، والتركيز على الفرص الاستثمارية الأكثر جذبا في أفريقيا والمتمثلة في قطاع الاتصالات وقطاع البنية التحتية وقطاع النقل وقطاع الخدمات ومنها الخدمات المالية".

مدي غني افريقيا بالموارد الطبيعية :

تعتبر أفريقيا من أغنى قارات العالم في الموارد الطبيعية مما يجعلها مصدرا هاما للموارد الأساسية التي تحتاج إليها الدول لتوفير احتياجات سكانها من المواد الاستهلاكية أو المواد الخام اللازمة لعمليات التصنيع والتي يمكن الحصول عليها بأسعار مناسبة . إن القارة الأفريقية غنية بثرواتها فهي تحمل فوق سطحها وتحته ثروات وإمكانيات طبيعية وبشرية حيث تضم نحو ٢٦% من الأرض الصالحة للزراعة في العالم، ١٨% من مساحة الغابات، و ١٣% من المزارعين في العالم، وعلى الرغم من هذه الإمكانيات الزراعية ووجود اليد العاملة لكن إنتاجها الزراعي لا يتعدى ٥،٤% من الإنتاج العالمي . كما إن القارة غنية بثرواتها المعدنية فهي تنتج أكثر من نصف إنتاج العالم من الذهب وخمس إنتاجه من البلاتين، ومعظم إنتاجه من الماس وتحتوي على ٩٠% من الاحتياطي العالمي من الكروم وتنتج منه سنويا نحو ثلث الإنتاج العالمي .إلا أنها تعاني من نقص في الوقود ولكن يعوض ذلك إمكانيات ضخمة من القوى المائية تقدر بنحو ٢٣،١% من إمكانيات العالم . وتنتج أفريقيا من الفحم ما يقارب ٣% من إنتاج العالم، ويشكل الاحتياطي الإفريقي من الغاز الطبيعي نحو ١٠% من الاحتياطي العالمي، بينما يصل الاحتياطي من البترول نحو ١٥% من الاحتياطي العالمي .

مستقبل مصر الاقتصادي من خلال افريقيا :

تمثل القارة الأفريقية عمقا استراتيجيا لمصر لعوامل كثيرة منها العوامل الجغرافية والسياسية والتاريخية، كما تعد القارة الأفريقية سوقا ضخما ذا كثافة سكانية عالية تصل إلى ١.٢ مليار نسمة ولهذا فهي تعتبر منفذا مهما للصادرات المصرية حيث تؤكد المؤشرات الاقتصادية إمكانية مضاعفة معدلات التصدير المصرية كما ونوعا للسوق الأفريقية. وتعتبر الدول الأفريقية بشكل عام مصدرا للدعم السياسي في المحافل الدولية بالنسبة للقضايا التي تهم مصر على الصعيد العالمي. إضافة للأهمية الإستراتيجية التقليدية للقارة ككل بالنسبة لمصر إلا إن منطقة حوض النيل تحتل المكانة الإستراتيجية الأكثر أهمية لارتباطها بنهر النيل ذلك الشريان الذي تعتمد عليه مصر في توفير ٩٨% من احتياجاتها المائية.

ترتبط مصر مع الدول الأفريقية بمجموعة من الاتفاقات لتيسير التجارة والاستثمار على المستوى الثنائي و الاقليمي. فعلى المستوى الثنائي وقعت مصر مجموعة من الاتفاقات الثنائية مع العديد من الدول الأفريقية شملت: اتفاقيات لتيسير التجارة البينية، اتفاقيات لتشجيع وحماية الاستثمار، اتفاقيات للتعاون الفني، اتفاقيات لمنع الازدواج الضريبي. وعلى المستوى الاقليمي فان مصر تشارك في تجمع الكوميسا، اتفاقية أغادير، تجمع الساحل والصحراء، النيباد. كما قامت مصر بتوقيع اتفاقية التجارة الحرة مع التجمعات الثلاث السادك، الكوميسا، الاياك.

ألاغنى حوال ٣٧ مثل متوسط الدخول فى الدول الافقر.

جدول (١): عدد السكان و الدخل القومي و التجارة الدولية للسلع فيمجموعة الدول السبع (عام ٢٠٠٣)

الدول	السكان (مليون نسمة)	الدخل القومي الاجمالي (بليون دولار)	دخل الفردسنويا (دولار)	الصادرات (بليون دولار)	الواردات (بليون دولار)
الولايات المتحدة الاميريكية	٢٩١	١٠٩٤٦	٣٧٦١٠	٧٢٤	١٣٠٦
اليابان	١٢٧,٢	٤٣٩٠	٣٤٥١٠	٤٧٢	٣٨٣
ألمانيا	٨٢,٦	٢٠٨٥	٢٥٢٥٠	٧٤٨	٤٩٤
المملكة المتحدة	٥٩,٣	١٦٨٠	٢٨٣٥٠	٣٠٤	٣٨٨
فرنسا	٥٩,٧	١٥٢٣	٢٤٧٧٠	٣٨٥	٣٨٨
ايطاليا	٥٧,٦	١٢٤٣	٢١٥٦٠	٢٩٠	٢٨٩
كندا	٣١,٦	٧٥٧	٢٣٩٣٠	٢٧٢	٢٤٦
الاجمالي	٧٠٩	٢٢٦٢٤	٣١٩١٠	٣١٥٩	٣٤٩٤
النسبة الي اجمالي العالم	٪١١,٣	٪٦٥,٦		٪٤٢,٧	٪٤٥,٨

و يتضح من جدول (١) ما يلي : -

١. الدول ذات الدخل الاكبر علي مستوي العالم و هم علي الترتيب

الولايات المتحدة الاميريكية ، اليابان ، ألمانيا ، المملكة المتحدة ، فرنسا ، ايطاليا، كندا.

٢. يتراوح دخل الفرد سنويا في هذه الدول ما بين ٣٧٦١٠ دولاركأعلي دخل في الولايات المتحدة الاميريكية الي ٢١٥٦٠ دولار كأدني دخل في ايطاليا .

٣. تمثل هذه الدول فيما بينها " مجموعه السبعة" و التي تجتمع بشكل دوري للتنسيق فيما بينها بخصوص موقفها من كل ما يجري في العالم بإعتبارها المحتكرة لقرابه ثلثي دخل العالم بأسره ، و اقل قليلا من نصف حجم تجارة العالم في السلع

يبلغ متوسط دخل الفرد في مصر حوالي ١٣٩٠ دولار سنويا إلا إنه نظرا لاختلاف مستويات الاسعار بين الدول المختلفة، فإنه بحساب القوة الشرائية الحقيقة للدخل في مصر يرتفع متوسط دخل الفرد الحقيقي الي ٣٤٩٠ دولارا للفرد سنويا

الخبرات الإقليمية، وأن تعمل هذه المراكز في مجال البحث والتطوير وتصميم التكنولوجيا الملائمة للواقع المحلي. ويمكن للحكومات تحسين القدرات التكنولوجية الوطنية من خلال إنشاء مؤسسات معرفية تقدم خدمات إرشادية واسعة النطاق، مما يؤدي إلى توفير بيئة مواتية لبناء الاقتصاد المعرفي في أفريقيا.

وإذا كانت العولمة تفتح افاقا واسعة للقادمين الجدد إلى سوق الانتاج والاستهلاك للاستفادة مما يتوافر لدى السابقين من مزايا تكنولوجية وعملية..إلخ إلا انه فى الواقع جاء اتفاق الجوانب التجارية لحماية حقوق الملكية الفكرية "التربس"ليجعل الأمر أكثر صعوبة من حيث إطالة مدة الحماية وتوسيع نطاقها لتشمل المنتجات،وليس فقط وسائل الإنتاج،ولفرض عقوبات اقتصاديه شديدة على مخالفة هذه الإحكام وغيرها.

- **ومن هنا يمكن القول إن الدول الساعية للتقدم عليها أن:**

١. تعنى بتنمية مواردها البشرية أى تعنى بالتعليم ومكوناتة المختلفة،مع التركيز على عنصر الجودة التعليمية.
٢. تعنى بالبحث العلمى والتطوير.
٣. تعنى بتطوير انتاجها كما ونوعا ورفع مستوى الكفاءة لديها.
٤. تعنى بخلق طلب متميز لدى القطاعين العام والخاص على المنتج التعليمى المتميز من جهة ونتائج البحث العلمى والتطوير من جهة اخرى.
٥. تعنى الدول النامية بخلق تكامل اقتصادى فيما بينها،والأحرى بذلك الدول العربية.
٦. وعلى مستوى الافراد يجب عليهم ان يتقنوا عديدا من المهارات المهنية واللوجستية ، التى تؤهلهم للحصول على فرص عمل سواء فى الداخل أو فى الخارج،وبما ينعكس على مستوى إنتاجيتهم.

- **القوى الاقتصادية الرئيسة فى العالم المعاصر**

انقسم العالم فى بداية هذه الألفية الثالثة إلى شمال متقدم وجنوب متخلف،فالدول فى الجزء الشمالى من الكرة الأرضية مثل : اليابان وأوروبا والولايات المتحدة الامريكية وكندا تتميز بتطور هياكلها الاقتصادى وتحقق معدلات مرتفعة للنمو ،وتوفر دخولاً مرتفعة لمواطنيها ، اما الدول التى تقع – فى الغالب فى الجزء الجنوبى من الكرة الارضية فى شرق ووسط وجنوب اسيا وقارة افريقيا وقارة امريكا اللاتينية "مع بعض الاستثناءات مثل دول النمور الاسيوية وجنوب افريقيا والصين وبعض الدول العربية البترولية".

فإنها تعانى من التخلف النسبى لهياكل اقتصاداتها وتنمو بمعدلات محدودة ، ولا توفر إلا مستويات منخفضة من الدخول لمواطنيها.

ويحذر تقرير التنميه فى "عام ٢٠٠٣" الذى يصدره البنك الدولى من أنه رغم الانخفاض الطفيف للنسبة المئوية للسكان الذين يعشيون فى فقر مدقع "أى الذين يعيشون على أقل من دولار واحد فى اليوم" إلا أن عددهم بلغ ١,٢ مليار نسمة فى نهاية القرن العشرين بنسبة ٢٠٪من اجمالى سكان العالم البالغ حوالى ٦ مليارات نسمة،كذلك ترتفع نسبة الفقراء الذين يعيشون على أقل من دولارين فى اليوم الواحد إلى ٥٠٪ تقريبا من اجمالى سكان العالم "أى حوالى ٣ مليار نسمة" ومن الناحية الأخرى اتسعت ظاهرة عدم المساواة فى توزيع الدخول على مستوى العالم ، بل تضاعف فى الاربعين سنة الاخيرة الفارق بين متوسط الدخل فى أغنى ٢٠ دولة أفقر ٢٠ دولة ،وبحيث وصل متوسط الدخول الآن فى هذه الدول

فرصة النفاذ إلى اسواق الدول الاخرى إذا ما طورت جهازها الإنتاجى ،وصارت تنتج بتكلفة اقتصادية أفضل من غيرها ،وتنتج ايضا منتجات ذات نوعية جيدة ليكون لها ميزة تنافسية ، الا انها فى الوقت ذاته تتعرض لمنافسة شديدة وغالبا غير متكافئة مع سلع الدول الاخرى خاصة التى تعمل فى ظروف انتاجية أفضل سواء من حيث التكنولوجيا المتطورة ،السياسات الواعية المشجعة على الإنتاج ،وتوافر المهارات الإدارية والعلمية والسوق ... الخ.

موقف مصر وقارة افريقيا من تحديات العولمة :

من التحولات الناتجة عن ظهور العولمة فإن أفضل طريق لمواجهة العولمة وأثارها السلبية الحالية والمحتملة على القارة الأفريقية يتمثل في :

- مزيد من التعاون والتكتل حيث أن ظاهرة التكتلات الدولية والقارية تشكل مؤشر وعي قومي وجماعي عالمي للوقوف ضد تيار العولمة أو التقليل من أثاره السلبية ، وهذا ما أدى إلى اندماج وتعاون اقتصادي بين دول القارة الأفريقية عن طريق الاتحاد الإفريقي والتكتلات الاقتصادية الأفريقية الذي سيكون من شأنه تعظيم قدرة أفريقيا على مواجهة التكتلات الدولية الكبرى والعولمة وسيكون لمصر دورًا عظيمًا من خلال رئاستها للاتحاد الإفريقي بما لها من رؤي نحو تحقيق التنمية المستدامة وتطوير الاقتصاد المصري بما يعود بالفائدة علي الاقتصاد الافريقي في مواجهة التحديات .

ويمكن تطوير اقتصاد الدول النامية ومنها الدول الأفريقية لمواجهة العولمة من خلال ما يلي:

- اتجاه القارة نحو تصنيع منتجاتها بدلاً من تصديرها خاماً.
- إتباع الأساليب العلمية الحديثة في الزراعة والرعي واستغلال الغابات وتحقيق الاكتفاء الذاتي من الغذاء
- توفير رأس المال اللازم للصناعة ونجحت دول القارة في تأسيس بنك الإتحاد الإفريقي ليسهم في قيام الصناعات الكبرى بالقارة.
- حل مشكلة الديون الإفريقية عن طريق إسقاط الدول الكبرى بعض ديونها وإعطاء فترة سماح لسدادها.
- تكوين سوق إفريقية مشتركة على غرار الإتحاد الأوروبي.
- هناك العديد من الفرص الجديدة لأفريقيا في عصر المعلومات، ومع ذلك فحتى تستطيع جني فوائد الاقتصاد المعرفي، لابد من اتخاذ عدد من الخطط الإستراتيجية على كافة المستويات. إن أفضل طريقة لمواجهة التحديات التي تواجه أفريقيا في ظل العولمة والاقتصاد المعرفي هي التخطيط الاستراتيجي والتنفيذ بحيث يشمل القطاعين العام والخاص، ومشاركة القطاع التطوعي والشركاء على الصعيد الوطني والإقليمي والعالمي.
- ويجب على الحكومات الأفريقية أن توفر بيئة مواتية لتعزيز نمو التكنولوجيا والصناعات التكنولوجية ذات الصلة. كما يجب أن يتم صياغة سياسات وطنية مصممة خصيصاً لتلبية أهداف محددة بوضوح، استناداً إلى الواقع المحلي والقيود والاحتياجات.
- ويتعين على الحكومات الأفريقية التركيز على سياسات التعليم، حيث أن العلم والتكنولوجيا هما حجرا الزاوية في تحقيق التقدم الاقتصادي الذي تحتاج إليه أفريقيا لتعزيز قدرتها التنافسية في القرن الحادي والعشرين. إن صناعة المعلومات والابتكار هما القوة الدافعة للنمو والتنمية. ويجب أن تجمع أفريقيا علمائها في مراكز

تطور النظام الاقتصادى العالمى

- **العولمة** globalization

شهد العالم تطورات سريعه ومتلاحقة ومتعددة الجوانب السياسية والاقتصادية والاجتماعية .. الخ على مدار العقود الماضيه .

ولقد تجسدت هذه التحولات بصفة عامة فى الازالة التدريجية للحدود غير الجغرافية بين الدول والكيانات السياسيه المختلفة،بحيث اصبح يسود الاتجاه نحو توحيد القوانين التى تحكم كثيرا من الانشطة الاقتصادية والاجتماعية، كما خرجت صيحات عالمية تنادى بضرورة نشر الديمقراطية واحترام حقوق الانسان على مستوى دول العالم المختلفة،وهذا فى الوقت الذى اصبح فيه المواطن فى اى دول يشهد ما يحدث فى بقية العالم وهوجالس فى مكانه،وذلك باستخدام الادوات الالكترونية لتغير محطات استقبال البث التلفزيونى.

ولعلنا لا نبالغ اذا قلنا ان انماط الاستهلاك تتقارب على نحو تدريجى بفضل الاعلانات التجارية العابرة للحدود من الوسائل الالكترونيه الحديثة،التى تهيمن عليها الشركات متعددة الجنسيات وهذه التحولات وغيرها تشكل مااصبح يطبق عليه الان العولمة أى عولمة القوانين والسياسات خاصة فى المجال الاقتصادى وعولمة فى الجانب الاجتماعى والثقافى وهكذا تتداخل وتتشابك الجوانب الاقتصادية والاجتماعية والثقافية والعلمية والتكنولوجيه للعولمة.

فالعولمة اذا وخاصة الاقتصادية منها تعنى ان كل كيان اقتصادى يتكامل ويندمج مع غيره من الكيانات ليتكون من الكل مجموع اقتصادى على مستوى العالم،يخضع للقانون والقواعد ذاتها بغض النظر عن خصوصية هذه الكيانات سواء كانت متقدمة ام متخلفة غنية ام فقيرة ،ولا يفرق بينهما سوى اعطاء مهلة من الوقت لكى تلحق الكيانات الضعيفة بالمجموع.

- **فالعولمة رافقها :**

١. حدوث تحولات عديدة فى هيكل الانتاج العالمى ذاته واصبحت اهم المدخلات تتمثل فى المعلومات والمعرفه واشكال جديدة من المواد الاولية تحل محل المواد التقليدية.
٢. ظهرت ثورات علمية عديدة خاصة فى مجال الزراعة وتجسد هذا فيما يعرف بالهندسة الوراثية او التكنولوجيا الحيوية.
٣. ازدادت حركات رءوس الاموال كثيرا بين الدول لتصبح اضعاف حركة التبادل التجارى ذاته مدفوعة بالتقدم فى وسائل الاتصال من جهة وبدافع المضاربة مستغلة مناخ التحرير فى السياسات والاقتصاد من جهة أخرى.
٤. اذا كانت العولمة تعنى التحرير والتخلص التدريجى من القيود والعقبات، التى كانت تعترض طرق التجارة الدولية فإنها القت بظلالها على الاداء فى الاقتصادات الوطنية ذاتها ،حيث اسهمت فى التحرير داخل الاقتصادات الوطنية Deregulation واستفادت منها كذلك .

- **العولمة فرص تحديات:**

أدت التطورات إلى فرض عديد من التجديات Challenges على الدول الناميةمع منحها العديد من الفرص Opportunities أمام الدول المتقدمة إن استطاعت أن تستفيد منها ،وهو ما يعد تحديا فى الوقت ذاته،يعطيها

من الصادرات ،وعند تساوى الجانبين يكون الميزان متوازنا.

ثانيا : ميزان أو حساب العمليات الراسمالية :

ويتضمن هذا الميزان العمليات المتعلقة بحركات رؤوس الاموال مابين الدول ويفرق عادة فى حركات رؤوس الاموال هذه مابين رؤوس الاموال طويلة الاجل ورؤوس الاموال قصيرة الاجل.ويعتبر راس المال طويل الاجل اذا زاد اجله عن عام .والا اعتبر قصير الاجل.

وبصفة عامة فان القيد فى ميزان المدفوعات يرتبط باتجاه المدفوعات وليس بالاثر القانونى لها.وقد تقوم الدولة بالاقتراض من الخارج ،ويؤدى ذلك الى حصولها على ايرادات نقدية ودخولها فى دائرة الاقتصاد القومى وتقيد قيمة القرض فى جانب الدائن او الايرادات رغم أن الدولة قد اصبحت من الناحية القانونية مدينة بمبلغ القرض.

- **انتقالات رؤوس الأموال :**

و هي تنقسم إلي :

١. قصيرة الأجل :

باخذ انتقال رؤوس الأموال صورا وأشكال متنوعة،كما ان اسبابه ودوافعه متنوعه بدورها

أ-حركات رؤوس الاموال التى تنتقل من دولة إلى اخرى بقصد تسوية العجز او الفائض فى علاقتهم التجارية الخارجية.

ب- تشجيع صادراتها تلجا الدوله الى منح الدول المستورده بعض القروض قصيرة الاجل لتمكينها من الاستيراد منها وبالتالى يزداد حجم التبادل التجارى بينها وبين هذه الدولة.

٢. القروض متوسطة وطويلة الأجل .

ترتبط القروض متوسطة وطويلة الاجل عادة بالمشروعات الاستثمارية ،فتمويل هذه المشروعات يحتاج الى فترة زمنية قبل ان تبدا فى الانتاج وبالتالى توفير القدرة على السداد،ولذلك فانها تحتاج الى انواع من التمويل متوسط وطويل الاجل.

وتعتبر الاستثمارات المباشرة من أهم صور انتقال رءوس الاموال ،وتمثل هذه الاستثمارات حقوق ملكية وبالتالى تتضمن مشاركة فى الادارة والارباح او الخسائر فعندما يقوم شخص بالاستثمار مباشرة فى مشروغ مافى دولة اخرى فانه يتحمل مخاطرة فضلا عن المشاركة فى الادراة ،وبالتالى يكون مالكا وليس دائناً.

٣. المساعدات الاقتصادية للتنمية

عرف النظام الدولى – وخاصة بعد نهاية الحرب العالمية الثانية –المساعدات الاقتصادية للتنمية أذ تقدم بعض الدول الصناعية المتقدمة وبعض المؤسسات منحا واعانات للدول النامية لمساعدتهافى جهودها من اجل التنمية او لمواجهة ظروف خاصة مثل الكوارث الطبيعية ،وبالتالى تختلف من هذه الناحية عن القروض والتسهيلات الائتمانية

- **التجارة الدولية والتجارة الداخلية :**

حظى تبادل السلع والخدمات فيما بين الدول بأكبر قدر من العناية من الاقتصاديين فى اطار التجارة الدولية ،بل لقد نظر إلى انتقالات رؤوس الأموال فى كثير من الاحوال باعتبارها لا تمثل ظاهرة منفصلة عن التجارة ، وانما تعتبر شكلا مكملا لتبادل السلع والخدمات.

- **خصائص العلاقات الاقتصادية الدولية :**

١. وجود الحدود السياسية
٢. اختلاف العملات
٣. اختلاف فى اللغة والعادات والقيم السائدة فى كل دولة.
٤. تكاليف النقل

- **ميزان المدفوعات :**

ميزان المدفوعات هو سجل محاسبى منتظم لكافة المبادلات أو العمليات الاقتصادية،والتى تتم مابين المقيمين فى الدولة والمقيمين فى العالم الخارجى خلال فترة معينه (سنة فى الغالب)

وينبغى أن ندرك هنا ان ميزان المدفوعات :سجل لما تحصل عليه الدولة من ايردادت من العالم الخارجى ومأتدفعه من مدفوعات ، فهو سجل للمتحصلات وللمدفوعات فى الميزان خلال فترة معينة وليس بياناً للمركز القانونى للدولة، باعتبارها دائنة أو مدينة للعالم الخارجى . وسوف يتضح ذلك عندما نرى كيف يتم قيد هذه العمليات وخاصة العمليات الراسمالية.

وإذا كان ميزان المدفوعات هو سجل لكافة العمليات التى تجريها الدولة مع العالم الخارجى خلال فترة معينة (سنة عادة)..فقد جرت العادة على تقسيم هذا الميزان إلى اقسام،من شانها المساعدة على حسن فهم العلاقات الاقتصادية المختلفة للدولة مع العالم الخارجى،وأهم تقسيمات ميزان المدفوعات قسمان ،هما:

أولاً :ميزان او حساب العمليات الجارية :

ويتضمن علاقة الدولة مع الخارج ،فيما يتعلق بالتجارة الخارجية للسلع والخدمات.. ويفرق عادة فى هذا الميزان او الحساب بين ميزان التجارة المنظورة وميزان التجارة غير المنظورة،ويشمل ميزان التجارة المنظورة الصادرات والواردات من السلع ،اما ميزان التجارة غير المنظورة فيتضمن الصادرات والواردات من الخدمات غير المادية مثل السياحة او مصاريف التامين والنقل مثل قناة السويس.

ويعتبر ميزان العمليات الجارية أهم قسمى ميزان المدفوعات :لانة يتعلق بالصادرات والواردات من السلع والخدمات التى توثر تاثيراً بالغاًعلى مستوى النشاط الاقتصادى فى الدولة .. وتقيد قيمة المتحصلات التى تحصل عليها الدولة من العالم الخارجى: نتيجة لصادراتها اليه من السلع والخدمات فى جانب الدائن من الميزان،اما قيمه المدفوعات التى تدفعها الدولة لهذا العالم نتيجة لواردتها منه فتقيد فى جانب المدين .ويعتبر الميزان فى حالة فائض اذا زادت المتحصلات

الفصل السادس

العلاقات الاقتصادية الدولية

الاهداف :

يصبح الطالب فى نهاية دراسته لهذا الفصل قادراً على أن :

١. يحدد الخصائص الخاصه بالتجارة الدولية ،والتى تميزها عن التجارة الداخلية.
٢. يوضح أهمية وجود ميزان سنوى للمدفوعات لكل دولة
٣. يبين مضمون ميزان أو حساب العمليات الجارية
٤. يميز مابين حساب رأس المال طويل الأجل ،وحساب راس المال قصير الاجل.
٥. يوصح الصور والأشكال المختلفة لانتقالات رؤوس الأموال مابين الدول ،وكذلك الأسباب والدوافع التى تقف وراء هذه الانتقالات .
٦. يحدد التغيرات الاقتصادية المصاحبة لعملية العولمة.
٧. يوضح المتطلبات التى ينبغى الوفاء بها لمواكبة العولمة.
٨. يبين القوى الاقتصادية الرئيسة فى العالم المعاصر.

تمهيد

لاتقتصر العلاقات الاقتصادية على الافراد المقيمين داخل إقليم الدولة، وانما ايضاً علاقات اقتصادية كثيرة بين افراد ينتمون إلى دول مختلفة.من هنا تظهر أهمية دراسة العلاقات الاقتصادية الدولية ،وتتنوع هذه العلاقات ،فهى تشمل انتقالات السلع فيما بين الدول ، وهو مايعرف بالتجارة الدولية.ولكن هذه العلاقات الاقتصادية الدولية لا تقتصر على انتقالات السلع ومايرتبط بها من وسائل للدفع. فهى تشمل ايضاً انتقال عناصر الانتاج : فالعنصر البشرى ينتقل من دولة إلى اخرى بشكل مؤقت كما هى الحال فى السياحة ، او باشكال اكثر استقراراً كما فى حالات الهجرة أو الانتقال للعمل فى دول اخرى .كذلك تشمل العلاقات الاقتصادية الدولية انتقال رؤوس الاموال للاستثمار فى دول أخرى او لاقراضها أو بمناسبة تقديم المنح والمساعدات.

البنوك التجارية.................................

البنك المركزى.....................................

٤-ضع دائرة حول الحرف الذى يمثل الاجابة الصحيحة فيما ياتى :

١- تتشابة الأسهم والسندات فى ان كليهما يمثل ......

أ-حصة الشريك فى راس المال.

ب-دين لصاحبه تجاة الشركة أو الجهة المصدرة.

ج-قرضا طويل الأجل.

د-ورقة مالية يمكن تداولها

٢- الاتى:يمثل خصائص الأسهم عدا ......

أ-المشاركة فى الادارة.

ب- الحصول على الارباح فى حالة حدوثها.

ج-يمثل دين على الشركة المصدرة.

د- يمكن تداولة فى سوق الاوراق المالية.

٣- الاتى يمثل خصائص السند عدا.........

أ-يمكن تداولة فى سوق الاوراق المالية.

ب-يمثل دينا لحامله تجاه الجهة المصدرة له.

ج-الحصول على فائدة

د-المشاركة فى الإدارة

٥- من خلال متابعتك لحركة الأوراق المالية بالبورصة المصرية فى القاهرة والاسكندرية عبر وسائل الاعلام،اكتب فيما يلى لايزيد عن صفحة واحدة عن :

أ- الدور الذى تلعبه البورصة المصرية فى الاقتصاد المصرى.

ب-قائمة بأهم الأوراق المالية التى ترتفع قيمتها وكذلك التى تنخفض قيمتها.

اسئلة الفصل الخامس

١-كان ظهور النقود تعبيرا عن قصور نظام المقايضة

فى ضوء العبارة السابقة واضح مايلى :

عيوب نظام المقايضة.

تطور اشكال النقود.

ج- وظائف النقود.

٢-ضع دائرة حول الحرف الذى يمثل الاجابة الصحيحة فى كل مما يأتى :

-تختلف بطاقات الائتمان عن بطاقات الحسم فى ....

أ- القيمة الحقيقة.

ب- الخصم الفورى او السداد الآجل.

ج-جهة الإصدار.

د-صرف النقود الكترونيا.

- الاتى يمثل دور البنك المركزى عدا ....

أ- إصدار النقود.

ب- إدارة السياسة النقدية.

ج- الرقابة على البنوك.

د-منح القروض للمشروعات.

٣-"ادت التطورات الاقتصادية إلى ظهور العديد من انواع البنوك والتى تختلف عن بعضها فى النشاط الرئيسى الذى يقوم به كل بنك".

فيما يلى أمثله لبعض انواع البنوك ،والمطلوب منك كتابة نوع النشاط الذى يقوم به كل بنك :

نوع البنك نوع النشاط

البنوك المتخصصة ....

البنوك الاستثمارية...

٤. توفير السيولة لحائزى الاوراق المالية،اذا مارغبوا فى بيع مافى حوزتهم من أوراق لاحتياجهم الى النقد السائل إما لاستخدامه فى الاستهلاك أو فى الاستثمار فى اوجه اخرى .

٥. توفير الضمانات اللازمة لاتمام الصفقات وفقاً لقواعد محددة مبسطة وشفافة.

٦. توفير مؤشرات عن حقيقة حجم النشاط ومستوى أداء الاقتصاد القومى والتى تعكسها حركة اسعار أسهم الوحدات الإنتاجية المتداولة اسهمها فى البورصة

يحق لحامل السند استيفاء قيمة سنده فى الميعاد المحدد وبعدها تنقطع صلته بالشركة.

٤. لايحق لحملة الاسهم فى حالة حل الشركة وتصفيتها استرداد قيمتها الابعد حصول حملة السندات على قيمة سنداتهم والفوائد.

- **سوق الأوراق المالية :**

فى الانظمة الاقتصاية الحديثة ، والتى تتمتع بوجود قطاع مالى متطور،تنظم عملية إصدار وتداول الأوراق المالية (وبصفة خاصة الأسهم والسندات وغيرها)من الاوراق المالية)من خلال سوق الأوراق المالية.

وينقسم سوق الأوراق المالية إلى سوقين رئيسيين هما :

١. سوق الإصدار أو السوق الأولية :

وهو السوق التى يتم فيها إصدار الاوراق المالية لأول مرة من خلال العملية المعروفة باسم عملية "الاكتتاب" والتى تتمثل فى طرح الاوراق المالية للبيع وعرضها على الراغبين فى الشراء وفقا لإجراءت حددها القانون. وبالنسبة للاسهم فقد يتعلق "الاكتتاب" بالاسهم الممثلة لرأسمال الشركة المساهمة عند تاسيسها أو عند زيادة راسمالها بعد التاسيس او عند زيادة رأسمالها بعد التاسيس .وبالنسبة للسندات..فقد يتعلق الاكتتاب بسندات صادرة عن شركة،او عن شخص من الأشخاص الاعتبارية العامة التى يحق لها اصدار مثل هذه السندات

٢. سوق التداول أو البورصة :

وهى السوق المنظمة التى يتجمع فيها العارضون والطالبون للأوراق المالية التي سبق اصدارها فى سوق الاصدار..وذلك فى أوقات وأماكن محددة حيث يتم لقاء وسطاء السوق لتنفيذ أوامر عملائهم المتلقاه من قبل ،واثناء فترة عمل البورصة لبيع وشراء الاوراق المالية. والقاعدة أن الاوراق المالية التى يسمح بتداولها فى "اطار البورصة" هى الاوراق التى استوفت الشروط المقررة.لقيدها فى البورصة ويقصر التعامل داخل قاعة التداول على وسطاء السوق المصرح لهم بالتعامل فيها طبقا للقواعد المقررة وتحت إشراف الهيئة القائمة على ادارة البورصة ولكن إلى جانب هذه السوق النظامية هناك ايضاً السوق غير النظامية خارج البورصة حيث يتم تداول الأوراق المالية غير المستوفاة بشروط القيد فى البورصة ولحين إتمام إجراءات قيدها.

أهم وظائف البورصة :

١. تلعب "البورصة" دوراً رئيساً فى الاقتصاديات المعاصرة.وتتمثل أهم الوظائف التى تؤديها فيما يلى:

٢. تعبئه المدخرات وتوجيهها إلى الاستثمار فى قنوات شرعية منظمة تخدم الاقتصاد الوطنى.

٣. توفير سوق دائمة ومستقرة ومفتوحة للتعامل تيسيراً على المدخرين والمستثمرين.

البورصة:

- **او سوق تداول الأوراق المالية :**

يتوقف معدل النمو فى أى اقتصاد معاصر – بصفه عامة – على حجم الاستثمارات الجديدة التي يتم تنفذيها ويحتاج هذا التنفيذ بالطبع إلى توفير الموارد المالية اللازمة ، هذه الموارد قد تكون متوافرة ذاتيا لدى الجهة المحتاجة للتمويل(فرد او جماعه او حتى الدولة)فتسخدمها مباشرة فى تمويل استثماراتها الجديدة التى ترغب فى تنفيذها .أما إذا لم تتوافر هذه الموارد الذاتية ..فإن هذه الجهة تجد نفسها مضطرة إلى اللجوء للغير لمدها بالتمويل اللازم،وهنا نفرق بين حالتين:

قد تلجا الجهة الى دعوة الغير للمشاركة معها فى التمويل ،باعتبارهم "مساهمين" فى المشروع المطلوب تنفيذه.

-وقد تلجا هذه الجهة إلى دعوة الغير لإقراضها المال،الذى تحتاجه لتمويل الاستثمار المرغوب تنفيذه باعتبارهم "دائنين"فقط وليسوا "مساهمين" وهنا تلجا الجهة للاقتراض من احدى وحدات الجهاز المصرفى –كوسيط مالى – أو تقوم بنفسها بالاقتراض مباشرة من الجمهور (افراد أو مؤسسات)من خلال اصدار صكوك مديونيه على نفسها (اوراق مالية)قد تكون بدورها فى صورة اذون قصيرة الاجل (اقل من عام عادة) او فى صورة سندات طويلة الاجل .هذا.. وقد اصبحت "الاسهم" و "السندات"من اهم و أشهر الصور المعاصرة لتوفير التمويل اللازم..إما لتمويل الاستثمارات الجديدة أو غيرها.

- **تعريف الاسهم والسندات والفارق بينهما :**

السهم هو صك أو ورقه مالية تمثل حصه الشريك فى رأس مال الشركة المساهمة او (التوصية بالاسهم) التى تساهم فى راسمالها : اى انه يمثل حقا للشريك فى الشركة ويمثل فى الوقت ذاته الورقة المثبتة لهذا الحق .

أما السند فهو صك او ورقه مالية تمثل دينا لصحابها تجاه الشركة المصدرة لها ، ويعتبر السند بصفة عامة بمثابة قرض طويل الاجل تحصل عليه الشركة من خلال الاكتتاب العام ويصدر فى شكل شهادات متساوية القيمة وقابلة للتداول بالطرق التجارية . كذلك قد تكون هذه الشهادات اسمية،أى يحدد فيها اسم صاحبها ،او حاملها دون تحديد لاسم صاحب الشهادة.

وتتمثل أهم الفروق بين السهم والسند فيما يلى:

١. يحق لحامل السهم الاشتراك فى إدارة الشركة أو الرقابة عليها.بينما ليس لحامل السند هذا الحق.

٢. يحق لحامل السهم الحصول على ارباح إذا حققت الشركة أرباحا فإذا لم تحقق فلا يحصل على شئ ،اما حامل السند فله الحق فى الحصول على فائدة ثابتة سنويا بصرف النظر عن تحقيق الشركة ارباح من عدمه.

٣. لا يحق لحامل السهم –كأصل عام- استرداد قيمة اسهمه،طالما ظلت الشركة باقية ويظل شريكا فيها ،بينما

البنكنوت الصادرة من البنك الأهلى المصرى القيمة نفسها للنقود الذهبية كما حرر هذا الأمر البنك الأهلى من ضرورة تحويل السند الذى يصدره إلى ذهب عند المطالبة من حامله.

وبذلك ..فقد اصبحت النقود الورقية ،وانه لم يعد يمكن تحويلها إلى ذهب

وفى عام ١٩٥٧ أصبغت صفه البنك المركزى رسميا على البنك الاهلى ،وتاكد إشراف الحكومة عليه،وفى عام ١٩٦١ انشئ البنك المركزى المصرى ،واستقل بذلك عن البنك الاهلى ،وأصبح له وحده منذ ذلك التاريخ الحق اصدار النقود الورقية فى مصر.

١. البنوك والنقود الإئتمانية:

إذا كانت النقود الورقية قد غيرت من شكل النقود المعدنية باصدار أوراق البنكنوت باعتبارها بديلا من الذهب والفضة الموجودة فى خزائن البنوك،فإن النقود الائتمانية قد فعلت الشئ نفسه بالنسبة للنقود الورقية .. فقد لاحظت البنوك التجارية أن الافراد يقومون بايداع نقودهم الورقية لديها مكتفين بالتعامل فيما بينهم عن طرق الشيكات.

وهكذا بدات تتنقل ودائع الأفراد فيما بينهم عن طريق الشيكات ،ومع استقرار عادة التعامل مع البنوك والثقة في قدرتها دائماً على الوفاء بالتزاماتها ،بدات البنوك التجارية فى التوسع فى الاقتراض بأكثر مما لديها من ودائع ،ونظراً لانتشار عادة قبول الشيكات فى التعامل فإن الصورة الجديدة من مديونية البنك التجارى قد اصبحت نوعا من النقود ،وهى تسمى "نقودا ائتمانية" ،لانها تخلق بمناسبة قيام البنك التجارى بمنح ائتمان ،اى قروض لعملائه ،وهذه القروض لاتمنح فى شكل نقود مادية (ورقية) وانما فى شكل حسابات تفتح بأسم العميل ويتصرف فيها عن طريق الشيك ،وهكذا اصبحت مجرد مديونية البنك التجارى نوعا من النقود لانها تقبل فى التعامل ، التدوال لهذه النقود هى استخدام الشيك.وبطبيعية فإن البنوك التجارية لا تسرف فى خلق هذه المديونية،لأنها يجب أن تكون دائما على استعداد للدفع نقداً للمستفيد من الشيك الذى يطلب صرفه فى شكل نقود ورقية.

وينبغى أن يكون واضحا أن النقود الائتمانية هى مديونية البنك كما هى مسجلة فى دفاتره،اما الشيك فهو وسيلة انتقال هذه المديونية من عميل الى اخر..كذلك فإنه من المفيد الإشارة إلى ان النقود الائتمانية لم تصل بعد الى مرحلة النقود الورقية ، فلا زال الفرد حراً فى قبول تسوية حقوقه عن طريق قبول الشيك ومديونية البنك أو الاصرار على تسوية حقوقه بالنقود الورقية.

- ### المؤسسات المالية الوسيطة غير المصرفيه:

إذا كانت البنوك هى اهم الموسسات المالية الوسيطة..فأنه يوجد إلى جانب البنوك،مؤسسات مالية أخرى تعمل فى مجال الوساطة فى التمويل ،ومن أهم هذه المؤسسات المالية الوسيطة شركات التامين وصناديق الاستثمار وصناديق الادخار والمعاشات وشركات توظيف الاموال

ولقد أدى التطور الاقتصادى إلى ظهور نوعين جديدين من البنوك هما :

أ-البنوك الشامله Universal banks

وهى البنوك التى لم تعد تتقيد بالتعامل فى نشاط معين أو فى منطقة أو اقليم معين ،واصبحت تحصل على الأموال من مصادر متعددة،وتوجهها إلى مختلف الأنشطة لتحقيق التنمية الاقتصادية والاجتماعية.

ب-البنوك الالكترونية E-banks

وهو بنوك تعمل بالكامل من خلال الانترنت حيث تتم المعاملات والعلاقات فيها من خلال الوسائل الالكترونية وليس اللقاء المباشر ، وتعرف هذه البنوك بإسم البنوك الافتراضية Virtual banks.

- **البنوك واصدار النقود :**

ولكى يتضح هذا الدور للبنوك فى اصدار النقود فاننا نتعرض بإيجاز لاصدار النقود الورقية ثم النقود الائتمانية

١. البنوك و إصدار النقود الورقية :

لجأ التجار الى ايداع نقودهم من الذهب والفضة فى البنوك ،فى مقابل الحصول على ايصالات (سندات) إلى أن أصبح التعامل فى النقود الذهبية والفضية يتم عن طريق تداول السندات الممثلة للمعدن فى البنوك ،وهكذا بدأ المتعاملون فى تداول هذه السندات بدلا من تداول الذهب والفضة ذاتها واستقر التجار على قبول السندات بدلا من الذهب او الفضة ،لمعرفتهم بأن حاملها يستطيع فى أى وقت ان يتقدم الى البنك الذى اصدرها ،ويحصل على الذهب والفضة بالقيمة الصادر بها السند وقد استجابت البنوك دائما الى مثل هذه المطالبات ،وهكذا ظهرت النقود الورقيه الى الوجود

كانت البنوك تراعى فى هذا الوقت تحقيق نوع من التناسب بين مالديهم من ذهب وماتصدره من سندات على هذا النحو ،فهى وان كانت تصدر سندات مستقلة اعلى من قيمة المعدن النفيس لمقابلة الطلبات المقدمة للسحب .

وبعد هذا عرفت بعض الدول عديداً من الأزمات ،عندما بدأت بعض البنوك تسرف فى اصدار النقود الورقية بكثرة ،مما عرضها للافلاس وضياع حقوق الأفراد ،ولذلك لم تلبث أن عمدت الحكومات إلى قصر أصدار النقود الورقيه (البنكنوت) على أحد البنوك فقط،والذى اصبح فيما بعد البنك المركزى كما بدات تضع بعض القيود على اصدار هذه النقود الورقيه وقد ارتبطت هذه القيود فى اول الامر بضرورة توافر نسبه من الذهب أنواع محددة من السندات والاوراق المالية ذات القيمة المستقرة مقابل اصدار النقود الورقية من جانب البنك المركزى،وهذا يسمى بالغطاء النقدى..كذلك بدأت الدول تلزم الافراد بقبول هذه النقود الورقية فى التعامل ،فلم يعد قبولها اختيارياً كما كانت الحال فى أول الأمر ، وانما اصبح اجبارياً بحكم القانون.

- **تطور إصدار النقود الورقية فى مصر**

ارتبط إصدار النقود الورقية في مصر بانشاء البنك الاهلى المصرى عام ١٨٩٨ ،وكانت النقود الورقية التى يصدرها البنك الاهلى اختيارية فى أول الامر ،ومع قيام الحرب العالمية الاولى ،صدر امر عال فى ١٩١٤ بأن يكون لأوراق

فى اقراض الأفراد والمشروعات.

وهى مؤسسات وسيطة لأنها تقوم بالوساطة بين جمهور المدخرين وجمهور المستثمرين .وتعتبر البنوك من اهم المؤسسات الماليه الوسيطة .وتحقق الوساطة المالية فائدة كبيرة للاقتصاد القومى ومنفعة مباشرة للمدخرين والمستثمرين فمن طريق المؤسسات المالية يمكن تجميع احجام كبيرة من المداخرت من العديد من صغار المدخرين .

فمع وجود هذه المؤسسات يكفى أن يضع المدخر مدخراته لدى البنك دون الاضطرار إلى البحث عن مستثمر فى حاجة الى أموال للقيام بمشروعاته .وفى نفس الوقت فإن صاحب المشروع إذا أحتاج إلى الاقتراض .. فإنه يتوجه إلى البنوك للحصول على تمويل بالاقتراض منها دون أن يكون عليه أن يبحث عن مدخر تتوافر عنده فوائض مالية.

- **انواع البنوك :**

١. البنوك المركزية :

البنك المركزى هو الجهة التى تأتى على رأس الجهاز المصرفى فى الدول المختلفة من خلال الوظائف المركزية ذات الاهمية الحيوية التى تقوم بها ،مثل :اصدار النقود – بنك الحكومة – بنك البنوك – وضع وأدارة السياسة النقدية فى الدولة بما لديها من وسائل الرقابة الكمية والنوعية.

٢. البنوك التجارية :

البنك التجارى هو بنك عام النشاط وغير متخصص حيث يتلقى الايداعات ويمنح (الائتمان) لكافة الأفراد والمؤسسات مختلفة الأنشطة الاقتصادية والتجارية ويقوم نشاط البنك فى الأساس على التمويل قصير ألاجل.

وتقوم البنوك التجارية الآن بعديد من الأنشطة التى تدر عليها عائد كبيراً.وتشهد البنوك التجارية مرونة كبيرة فى هذا المجال : إذ لم تعد وظائفها تقف عند حد الوظائف النقدية أو التمويلية التقليدية.

٣. البنوك المتخصصة :

وهى بنوك تتخصص فى منح الائتمان لنوع محدد من النشاط ،بحيث يقتصر عملها على هذا النشاط دون غيره ،مثل البنوك العقارية ،الزراعية ،الصناعية....إلخ.ولكنه يجدر ملاحظة ان نشاط هذه البنوك شهد توسعا فى السنوات الاخيره .

٤. البنوك الاستثمارية :

وهي مؤسسات مالية وسيطة تقوم بتجميع الاموال ، التى تتوافر لديها من المساهمين أو من خلال طرح السندات فى السوق المالية ، ووضعها تحت تصرف المستثمرين.ويقوم نشاط البنك فى الأساس على طرح السندات فى السوق المالية ،ووضعها تحت تصرف المستثمرين .ويقوم نشاط البنك فى الاساس على التمويل طويل الأجل .وتنتشر هذه البنوك فى الدول المتقدمة خاصة الولايات المتحدة وانجلترا .

- **وظائف النقود**

١. **انها قوه شرائية عامة** : والمقصود بذلك هو أن من يحوز النقود يستطيع ان يحصل على ما يشاء من سلع وخدمات معروضة للبيع ، وبالمثل فأن كلاً من يعرض خدمة او سلعة للبيع يقبل التخلى عنها مقابل الحصول على النقود وهكذا ترتبط القوة الشرائية العامة للنقود بتمتعها بالقبول العام من كافة افراد المجتمع الذى تستخدم فيه.

٢. **النقود وسيط فى التبادل :**

وهذه هى الوظفية الأساسية للنقود ، وتعتمد هذه الوظيفه على تمتع النقود بالقبول العام فى المبادلات ،فنظراً أن الجميع يقبلون التنازل عن سلعهم أو خدماتهم المعروضه للبيع مقابل الحصول على النقود، فإننا نقول بأن النقود قد اصبحت تقوم بدور الوسيط فى التبادل ... وهكذا تنقسم عملية المقايضه الى عمليتين هما البيع ثم الشراء ،ونلاحظ أن وظفية النقود كوسيط فى التبادل يتضمن تدخل النقود بالفعل فى عملية المبادلة

٣. **النقود مقياس للقيمة :**

يتم التبادل فى الاقتصاد الحديث بين عديد من السلع والحدمات التى تعرض فى الأسواق وهذه السلع غير متجانسة ،ومن ثم لابد عند اجراء تبادل بينهما من إجراء المقارنة بين قيمها لتحديد معدلاتها وذلك باستخدام وحدة قياس واحدة وإلا تعقدت الأمور وصعب الأمر على الأفراد فى متابعة هذه المقارنات .وتفيد فى هذا المقام حيث تقدر قيم مختلف السلع والخدمات بعدد ماتساويه من وحدات نقدية .

٤. **النقود مخزن للقيمة :**

النقود لها قوة شرائية عامة فى الحال وفى المستقبل ومن ثم تعطى لحائزها الحق فى الحصول على مايشاء من السلع والخدمات المعروضة فى المستقبل :أى أن من يحتفظ بالنقود يكون محتفظا بقوى شرائية عامة يستطيع أن يوظفها فى أى وقت للحصول على مايشاء من سلع وخدمات . ويشترط لكى تؤدى النقود هذه الوظيفة التمتع بالاستقرار النسبى فى قيمتها .ومن هنا يتضح لنا أن استقرار الأسعار ومايعنيه من استقرار لقيمة النقود هى شرط ضرورى لقيام النقود بوظيفة مخزن القيمة ،وبدونها يتعرض الاقتصاد القومى والمبادلات والادخار للاهتزاز والتدهور.

- **النقود والقبول العام :**

النقود هى كل شئ يتمتع بالقبول العام من افراد المجتمع ،ويقوم بالتالى بوظائف الوسيط فى التبادل ومقياس القيم ومخزن للقيمة فى آن واحد.فالنقود تقبل فى التعامل لاعتقاد كل فرد انها تتمتع بهذا القبول العام لدى كل فرد آخر . وهكذا فكل فرد يقبل التعامل بها لانه يعتقد أن غيره سوف يقبلها وبالتالى يقبلها الجميع.

البنوك (المصارف)

البنوك مؤسسات مالية وسيطة تقوم بتجميع مدخرات الأفراد والوحدات الاقتصادية التى تحقق فائضا وتستخدمها

وتصدر هذه البطاقة عن جهات عديدة بعضها مصرفى والبعض الآخر غير مصر فى .

٢. بطاقات الحسم (الخصم)الفورى Debit card

وتختلف هذه البطاقات تعطى عن سابقتها فى انها لا تمنح حاملها ائتمانا و لكن يتم خصم قيمة الصفقة من حساب العميل فى البنك على الفور.

٣. بطاقات الصرف الآلى ATM cards

وهى بطاقات تعطي لصاحبها ميزة صرف النقود من شبابيك إلكترونية،معدة خصيصا لهذا الغرض فى الكثير من البنوك وفروعها . وتتميز هذه البطاقات أن حاملها يستطيع أن يحصل على مقدار النقدية المتفق عليه من البنك الذى يصدرها فى أى وقت حتى بعد إغلاق البنوك لأبوابها ،كما تتسم بأنها اصبحت منتشرة بشكل كبير.

٤. البطاقات المدفوعة القيمة مقدما stored value cards

وهى البطاقات التى يتم دفع قيمتها مقدماً عند شرائها وتخزن فيها قيمتها والتى تكون من فئات مختلفة ، مثل:البطاقات التى تستخدم فى التليفونات ووسائل النقل ،آلات التصوير الفوتوغرافى الأتوماتيكية..الخ.وقد تستخدم هذه البطاقات لمرة واحدة أوعدة مرات حسب القيمة المخزنة فيها والغرض من الاستخدام ومدته.

ب / النقود الإلكترونية E-money

وتضم هذه النقود – حتى الان – نوعين :

الأولى :البطاقات الذكية smart cards

وهى بطاقات يثبت عليها شريط ممغنط ، مثبت عليه شريحة الكترونيه أو أكثر تمثل حاسبا صغيرا

مزود بذاكرة،ويكون قادرا على تخزين، واسترجاع ومعالجة البيانات المسجلة عليه . ويتم تحميل هذه البطاقة بقيمة معينة من حساب العميل وكذلك كافة البيانات الشخصية الخاصة به.لذلك فإنه عند التعامل يتم تمريره على آلة قارئة له ، ويتم خصم التعاملات دون الحاجة لقيام المشترى بالتوقيع أو حمل ما يثبت شخصيته..

الثانية : النقود الرقميه digital money

وهى النقود التى تأخذ صورة نبضات bits كهرومغناطيسية ،يحملها كارت ذكى على النحو السابق اوعلى الهارد درايف (hard drive) للحاسب الشخصي وكل مايفعله العميل هو الضغط على ارقام معينة لتسوية المعاملات أو الاضافة الى الحساب ، او النقل من حساب الى اخر .

والواقع أن انتشار مثل هذه التطورات يحتاج إلى بنية اساسيه فى الجهاز المصرفى ،أى يحتاج الى بنوك متطورة ، كما يحتاج الى محال تجاريه حديثة تتوافر لديها الوسائل الالكترونية المجهزه لاستخدام هذا النوع من النقود وتتطلب شبكات إلكترونية للتعاملات بين البنوك والمحلات التجارية بعضها البعض.

هذه الايصالات أو الأوراق التجارية الممثلة للذهب أو الفضة الموجود فى البنوك وبذلك بدأت تظهر اوراق نقدية قابله للتحويل فى الحال لدى البنوك إلى ذهب وفضة ،واصبحت هذه الأوراق تتداول فى الأسواق وتقبل التعامل بدلاً من هذين المعدنين،واصبح حامل هذه الأوراق ،ايا كان مالكا لقيمة من الذهب أو الفضة بقدر ماهو مدون فيها ،وتلتزم البنوك أمامه بالوفاء بحقه من هذين المعدنين بمجرد طلبه.. وهكذا بدأت تظهر النقود الورقية البنكنوت كاملة القيمة.

٤. النقود الائتمانية

ومع استقرار العرف على التعامل بالنقود الورقية التى يصدرها الصاغة أو البنوك ، عمدت هذه البنوك الى التوسع فى نشاطها بحيث اصبح المتعاملون يقبلون ديون أو التزامات البنوك فى تعاملهم نظراً للثقة الكاملة فيها.وقد أدى هذا التطور إلى ظهور شكل جديد للنقود ، يرتبط بفكرة الدين أو الالتزام على البنوك هو النقود الائتمانية أو نقود الودائع .ويكفى هنا أن نشير إلى أن العلاقة بين هذه النقود الائتمانية والنقود الورقية تشبه العلاقة بين النقود الذهبية والنقود الورقية.ففى كلتا الحالتين تصدر البنوك نقوداً جديدة بناء على الاحتفاظ بالنقود القديمة فى خزائنها

• المدفوعات الالكترونية E-payment

إذا كانت النقود سابقا قد مرت بمراحل عديدة فى تطورها تحت ضغط الحاجات لتيسير المبادلات بين المتعاملين،فإنه من المتوقع أن تشهد تطوراً مادام الإقتصاد والمجتمع وكذلك المعاملات فى تطور مستمر.ومن هنا ظهرت للوجود الوسائل الإلكترونية للمدفوعات .

أ / الوسائل الإلكترونية للمدفوعات:

تستخدم هذه الوسائل لتسوية المدفوعات المترتبة على التعاملات ،التى تتم بين الأفراد بعضهم البعض أو بينهم وبين المؤسسات الاقتصادية والتجارية أو فيما بين هذه الأخيرة

- ونستعرض الآن أهم أنواع وأهم خصائص هذه البطاقات على النحو التالى:

١. بطاقات الائتمان Credit cards

تمنح هذه البطاقة حاملها ائتمانا لمدة معينة ، وفقا للشروط المتفق عليها ،بحيث يستطيع أن يستخدمها لشراء مايشاء من سلع وخدمات من السوق فى الداخل أو الخارج.

وتلجأ الجهات المصدرة لهذه البطاقات إلى منح مزايا لحامليها مثل

١. اعفائهم من دفع الفوائد لمدة محددة قد تصل إلى قرابة شهرين، اذا ما سددوا قيمة الائتمان كاملة خلالها

٢. لايلتزم العميل بالسداد الكامل لقيمة الائتمان بعد انتهاء المدة السابقة ،بل قد يسدد نسبة معينة تحددها الجهة المصدرة كأن تكون ١٠٪ أو ٥٪ يستطيع العميل أن يستعملها فى الشراء من الأسواق الخارجية أيا كانت العملة المستخدمة ويسوى قيمة معاملاته فى النهايه بالعملة الوطنية التى اصدرت على أساسه البطاقة ،أى لا يلتزم بأن يسدد بالنقد الأجنبى .

- **المقايضة :**

كان التبادل يقوم فى اول الأمر عن طريق النظام الطبيعى والتلقائى وهو المقايضة ،والمقصود بالمقايضة :هو:مبادلة شئ فى مقابل شئ اخر فمن يحوز شيئا لا يحتاج اليه أو حاجته اليه قليلة ويريد شيئا يحوزه شخصا آخر فإنه يستطيع أن يتفق مع هذا الشخص الآخر لإجراء المبادلة بين الشيئين إذا تصادف وكان هذا الشخص الاخير يرغب فى ذلك.

لكن بساطة المقايضة هى نفسها التى تجعل هذا الأسلوب غير صالح حين تتعدد السلع وتتعقد حاجات الأفراد وتتنوع اذواقهم وتتطور المجتمعات.لذلك لم تلبث أن ظهرت مثالب المقايضة والتى تتمثل فى الآتى :

أ. تفترض المقايضة توافقا متزامنا فى رغبات المتعاملين فى الوقت نفسه ، فينبغى أن يرغب كل من الطرفين فى الحصول على السلعة التى فى يد الطرف الآخر . فى المقابل التنازل عن السلعة التى فى يده،وينبغى،أن يتحقق ذلك فى الوقت نفسه وبالمقدار نفسه،ويطلق على هذا التوافق المتوزان والمزدوج فى الرغبات.

ب. لا تقدم المقايقضة وسيلة صالحة لتقييم السلع،فأية كمية من السلعة (أ) يمكن مقايضتها مقابل السلعة (ب).وتظهر هذه الصعوبه عندما تتعدد السلع.ومن جانب آخر فإن بعض السلع تكون غير قابلة للتجرئة أو التقسيم كالحيوانات،وبذلك لا يساعد نظام المقايضة على إيجاد نظام واضح للمقارنة بين قيم السلع.

ج. تعجز المقايضة عن تقديم وسيلة صالحة لاختران القيم ،فإذا زاد انتاج الفرد عن حاجاته اليومية.فإنه سوف يضطر إلى اختزان ثروته فى شكل سلع.وقد تكون مما ينالها التلف او العطب قد يضطر إلى ان يتبع سلوكاً غير رشيد،إما بالإسراع فى استهلاكها دون حاجة حقيقية أو التنازل عنها دون مقابل مناسب.

- **ظهور النقود**

ظهور النقود نشأ عن طريق انقسام عملية المقايضة إلى جزئين هما (البيع والشراء) والبيع هو التنازل عن السلعة التى لايحتاجه الفرد فى مقابل النقود ثم ثانيا يستخدم الفرد النقود للحصول على السلع الأخرى التى يحتاجها وهذه هى عملية الشراء .

- **تطور النقود**

لم تظهر النقود بخصائصها الحالية مرة واحدة ،بل خضعت لتطور طويل ،ومن أجل التخلص من عيوب المقايضة ،فمرت النقود بالمراحل التاليه:

١. **النقود السلعيه** :هى سلعة ذات قبول عام تم استخدامها كمقياس للقيمة ووسيط فى التبادل، فاكتملت لها الوظائف الأساسية.إلا انها واجهتها مشاكل كثيرة منها القابلية للسرقة ، القابلية للتلف أو الحريق ، القابلية للموت مثل الحيوانات ، ضعف القابلية للتخزين مدة طويلة.

٢. **النقود المعدنية**

تم استخدامها لتفادى عيوب النقود السلعية وكانت من الذهب او الفضة حيث انها يسهل حملها ويسهل اخفائها ويمكن تجزئتها وغير قابلة للتلف .

٣. **النقود الورقية**

ومع استمرار الدور البارز للتجار بإيداع الذهب والفضة لدى الصياغ ثم البنوك ،مقابل إيصالات أو أوراق تجارية ،وبدلا من تداول الذهب والفضة بين المتعاملين،فقد اصبح التجار يقبلون تسوية معاملاتهم فيما بينهم مقابل تداول

الفصل الخامس

النقود والبنوك

الاهداف

يصبح الطالب فى نهاية دراسته لهذا الفصل قادراً على أن :

١. يفسر ارتباط ظهور النقود بوجود عيوب لنظام المقايضة.
٢. يوضح كيفيه نشأة النقود
٣. يذكر مراحل تطور النقود
٤. يحدد وظائف النقود
٥. يحدد أنواع المدفوعات الإلكترونية.
٦. يوضح الوظيفة التى أهلت النفود لتصبح القنطرة أو الرابطة التى تصل بين الحاضر والمستقبل
٧. يناقش صحه الرأى القائل بأن(أى شئ يتمتع بالقبول العام من جانب أفراد المجتمع يمكن أن يكون نقوداً)
٨. يشرح العبارة القائلة بأن البنوك هى مؤسسات مالية وسيطة)
٩. يحدد انواع البنوك مع التمييز بين طبيعة نشاط كل نوع منها.
١٠. يحدد نشأة وتطور النقود الورقية ودور البنك المركزى فى إصدارها.
١١. يستتنج دور البنوك فى إصدار النقود بانواعها
١٢. يوضح دور المؤسسات الماليه الوسيطة غير البنوك فى تجميع المدخرات وزيادة فرص الاستثمار.

تمهيد :

ربما كان اكتشاف الإنسان للنقود ،كما هو الحال بالنسبة لاكتشاف النار أو الكتابة . من اهم الخطوات الأساسية فى تطور الحضارة الإنسانية. وقد ساعد هذا الاكتشاف فى ترشيد الانسان لسلوكه الاقتصادى إلى حد كبير مما كان له اكبر الأثر على التقدم الاقتصادى بصفة عامة.

ج.طرح نصيب الحكومة من اسهم بعض الشركات المملوكة للدولة للبيع.

د.انتقال بعض او كل حقوق الإدارة فى المؤسسات العامة للقطاع الخاص.

هـ . تشجيع الشباب على القيام ببعض المشروعات الخاصة.

و.توزيع الاراضى المستصلحة والمملوكة للدوله على بعض الشباب.

ز.الغاء نظام التسليم الإجبارى لبعض المحاصيل.

ح.السماح للقطاع الخاص بإنشاء إدارة الطرق العامة ومحطات توليد الكهرباء.

٥- أكتب مقالاً فى موضوع نقل ملكية بعض المشروعات الزراعية أو الصناعية أو الخدمية العامة إلى القطاع الخاص ، موضحاً رأيك فى هذا الموضوع ، مع مراعاة مايلى.

أ.الآثار المترتبة على ذلك.

ب.مناقشة الآراء المعارضة والمؤيدة لذلك ورايك الشخصى ، تجاه تلك الآراء.وسوف يتم تقييم مقالك فى ضوء اتساق أجزائه وكفاية المعلومات الواردة فيه،وليس وفقا لرأيك الشخصى أيا كان.

- يقصد بمفهوم الخصخصة..............

أ-اعادة توزيع الادوار بين الدولة والقطاع الخاص فى ملكيه إدارة وسائل الأنتاج.

ب-سيطرة الدولة على الانشطة الخاصة بقطاع الانتاج.

ج-تعظيم العائد من الانشطة الاقتصادية لصالح الأموال المخصصة للخدمات العامة.

د-قيام القطاع الخاص بالمشاركة فى تحمل بعض نفقات الخدمات الاجتماعيه.

٢-يعتمد السوق فى توفيره للسلع والخدمات على حافز المصلحة الذاتيه وبالتالى تفاعل قوى الطلب والعرض .

فى ضوء هذه العبارة حدد صواب أو خطأ العبارات التالية :

أ-يصلح مبدأ المصلحة الذاتية أو الاختيار فى توفير الخدمات العامة.

ب- قد لايستطيع السوق توفير الخدمات الاجتماعيه بالحجم المناسب.

ج-ينبغى استخدام سلطة الدولة او القهر القانونى فى توفير الخدمات العامة.

د-تعتبر الضرائب نوعاً من القهر القانونى الذى يمكن الاستغناء عنه.

هـ -تعد فكرة الخدمات العامة والاجتماعية اساساً للمالية العامة.

٣-تعد الضرائب من اهم مصادر الإيرادات العامة فضلاً عن أنها ابرز مظاهر سيادة الدولة فى ضوء العبارة السابقة حدد صواب او خطأ العبارات التالية.

أ.ينبغى ان يوجد تناسب بين الرسوم والخدمة المقدمة.

ب.تفرض الرسوم على الأفراد مقابل خدمة معينة.

ج.العدالة فى توزيع الضرائب ترتبط بفكره المنفعة.

د.الرسوم التى يدفعها الأفراد نوع من الضرائب المباشرة.

هـ. ترتبط فكرة الضرائب وتوزيعها بالقدرة على الدفع.

٤-اتخذت عملية الخصخصة عديداً من الصور،والآتى يمثل صور الخصخصة بالمجتمع المصرى.

المطلوب وضع علامة (✓) أمام ما يمثل عملية الخصخصة وعلامة (✗) فيما يمثل غير ذلك:

أ.تحرير التجارة الخارجية.

ب.خفض الرسوم الجمركية على عديد من السلع المستوردة.

اسئلة الفصل الرابع

١-ضع دائرة حول الحرف الذى يمثل الاجابة الصحيحة فى كل مما يأتى:

-يتمثل الفرق بين الحاجات الفردية والحاجات العامة فى ....

أ- حجم التكلفة.

ب-مبدأ القصر والاستئثار.

ج-درجه الاشباع.

د-حجم المنفعة.

-تتشابه الحاجات الاجتماعيه والحاجات العامة فى كونها تتحقق من خلال ....

أ-المصلحة الفردية والاختيار.

ب-عدالة التوزيع.

ج-استخدام سلطة الدولة.

د-مجموع الانشطة الفرديه.

- كل عبارة ممايلى تعبر عن دور الدولة فى النشاط الاقتصادى عدا ....

أ-اشباع الحاجات العامة.

ب-تحقيق الاستقرار والنمو.

ج-تحقيق مبدأ المصلحة الذاتية للمستهلك والمنتج.

د-تحقيق عدالة التوزيع.

-كل عبارة ممايلى تمثل مبادئ الموزانة العامة عدا ....

أ-ذاتيه الايرادات العامة.

ب-توازن الموازنه.

ج-عموميه الموازنة.

د-وحدة الموازنة.

د- مبدأ توازن الموازنه

الأصل أن تكفى الايرادات العامة لتغطية النفقات العامة وبالتالى تتوازن الموازنة العامة.ومن هنا جاءت التسمية (الموازنة) ،ومع ذلك فإن الفكر الاقتصادى قد عرف بعض التطور، عندما الحقت بالحكومه مسئولية تنشيط الاقتصاد القومى،ولو يتحمل بعض العجز فى الموازنة . ومنذ نهايه الحرب العالمية الثانية ،بدأت الدول تسرف فى النفقات مما أدى الى تفاقم عجز الموازنات ،وقد أدى هذا التهاون فى تحقيق التوزان والإسراف فى عجز الموازنات إلى تزايد الاعتماد على التوسع فى إصدار النقود وما ترتب عليه من ارتفاع معدلات التضخم .وقد أنعكس ذلك فى عدم استقرار مستويات المعيشة،وظهور اختلالات فى العلاقات الخارجيه للدول . ولذلك فقد بدأ اتجاه عكسى للمطالبة بالعودة بشكل أكبر إلى احترام مبدأ توازن الموازنة بالعمل على تخفيض العجز فيها حتى يتلاشى كلية إن أمكن .

الموازنة العامة

تعريف الموازنة العامة

الموازنة العامة (هى الوثيقة القانونية والمحاسبية التى تبين النفقات العامة،التى ستقوم بها الدولة والموارد المالية التى يتنظر أن تحققها لفترة قادمة ،غالبا بسنة مالية.

وفى ضوء ماأشرنا اليه من ارتباط المالية العامة بالديمقراطيه .. فانه لابد من وأن تعرض الموازنة العامة على ممثلى الشعب وأن تصدر بقانون .ولذلك فإن الموازنه وإن كان مضمونها برنامج مالى لنشاط الدولة .. فهى من الناحية الشكليه قانون يصدر من السلطة التشريعية . وتتضمن الموازنة العامة كما راينا أمرين،هما:النفقات العامة والايرادات العامة للسنة المالية القادمة.

وفيما يتعلق بالنفقات العامة.. فان الموازنه تتضمن تصريحاً للدولة بالقيام بهذه النفقات . اما بالنسبه للايرادات العامة فانها تشير الى توقعات الدولة لما يمكنها تحصيله من ايرادات .ولذلك ..فان ارقام الموازنه عن الايرادات العامة لاتعدو أن تكون مجرد توقعات،ومن هنا فإن اكتمال الرقابة الشعبيه على الموازنة العامة يتطلب أن تعرض الحسابات الختامية للدولة على السلطة التشريعية إلى جانب هذه الموازنة ويمثل الحساب الختامى للدولة الانفاق الفعلى والإيرادات التى حصلت فى سنة مالية سابقة وفى الحقيقة فان رقابة السلطة التشريعيه لنشاط الدولة المالى إنما تتحقق بدرجة اكبر بعرض الحسابات الختاميه على مجلس الشعب لاعتمادها ،ويقوم الجهاز المركزى للمحاسبات باعداد تقارير الحسابات الختاميه.

مبادئ الموازنة العامه:

هذه المبادئ تمثل اتجاهات عامة..وفى كثير من الأحوال،يتم الخروج عليها بالنظر إلى تغيير الظروف وسنعرض أهم هذه المبادئ:

أ- مبدأ سنوية الموازنة :

توضع الموازنه العامة لسنة مالية قادمة لا أكثر،ويسمح ذلك بسهولة التنبؤ بالنفقات العامة والايرادات العامة من ناحية ، ويوفر للمجالس الشعبية الفرصة للرقابة المستمرة. على ان ذلك لا يمنع من أن تأخذ بعض الدول إلى جانب الموازنة السنوية بنوع من البرامج لعدة سنوات وتعد الموازنة فى اطارها . ويمكن النظر إلى الخطة الخمسية باعتبارها نوعا من هذه البرامج الأطول أمدا،وتبدأ السنة المالية فى مصر فى اول يوليو من كل عام.

ب- مبدأ وحدة الموازنة :

تدرج جميع نفقات وإيرادات الدولة فى وثيقة واحدة هى الموازنه العامة للدولة ، مما يعطى صورة متكاملة عن نشاط الدولة.

ج-مبدأ عمومية الموازنة:

تظهر الموازنة جميع النفقات والايرادات بشكل مفصل دون اجراء أيه مقاصة بين ايرادات اى مرفق ونفقاته.

قدرتهم على الدفع من جهه ومعاملة المكلفين ذو الظروف المتماثله بنفس المعاملة.

وإذا كانت عدالة الضرائب من اهم مظاهر النظام الضريبى الناجح ،فقد تطورت فكرة العدالة الضريبه حيث كان الرأى السائد قديما يرى ان تربط الضريبة بشكل ما بالمنفعة التى يحققها الفرد لذاتة من نشاط الدولة ،وبناء على ذلك كان الغنى يدفع ضريبة أعلى من الفقيرلانه كان يحقق نفعاً أكبر من خدمات الدولة بما له من اموال ولكن الرأى المستقر حاليا هو أن العدالة فى توزيع الضرائب لا ترتبط بفكرة المنفعة وإنما بالقدرة على الدفع.

وعادة ماتقاس القدرة على الدفع بما يحققة الممول من دخل سنوي.وتتجه معظم الدول حاليا إلى ربط الضرائب بالدخل.

ب- مبدأالكفاية:ومقتضى ذلك أن توفر الضرائب حصيله كافية لمواجهة النفقات العامة .

ج- مبدأالملاءمة:بمعنى أن يتم تحصليها بالأسلوب وفى المواعيد المناسبة للممولين،(أى دافعى الضرائب)دون إرهاق من ناحية او تهاون وتيسير للتهرب من ناحية اخرى

د- مبدأ اليقين : بمعنى أن تحدد القواعد الخاصة بفرض الضريبة وحسابها وتحصليها بشكل واضح وسهل ودقيق.

أهم تقسيمات الضرائب :

يمكن تقسيم الضرائب إلى أنواع مختلفة حسب أساس التقسيم :

أ - من حيث وعاء الضريبة ضرائب على الاشخاص وضرائب على الاموال. واهم صور الضرائب على الأشخاص مايسمى بضريبه الرؤوس ،وهو شكل من الضرائب كان معروفا فى الماضى.اما فى العصر الحديث،فإن الضرائب تفرض على الأموال سواء كانت دخلا نقدياً او كانت منقولاً أو عقاراً

ب -من حيث اسعارها الى ضرائب نسببه وضرائب تصاعديه فالضريبة النسيبة ،يتحدد سعرها بنسبة معينة من الوعاء الخاضع للضريبة دون تغيير فى هذه النسبة مهما زاد او قل هذا الوعاء.أما الضريبة التصاعدية .. فإنها تفرض بنسب متصاعدة مع زيادة قيمة الوعاء الخاضع للضريبه. وفى هذه الحالة ..فان الضريبة تفرض بشرائح بحث يزيد سعر الضريبة مع الارتفاع من شريحة الى شريحة اعلى فى الوعاء الخاضع للضريبة .

- تقسم الضرائب الى الضرائب المباشرة وهى تفرض على الدخل (او الثروة) بمناسبة الحصول عليه ومن امثلتها فى مصر الضريبة الموحدة على دخل الاشخاص الطبيعين والضريبة على أرباح شركات الأموال (مثل الشركات المساهمة)وفقا للقانون الجديد للضرائب رقم ٩١ل٢٠٠٥

اما الضرائب الغير مباشرة فتفرض على الدخل عند انفاقة اهمها الان على الاطلاق الضريبة العامة على المبيعات وفقا للقانون رقم ١١ لسنه ١٩٩١ والقانون رقم ١٧ لسنة ٢٠١١ ،يليها فى الأهميه الضريبة الجمركية التى تتناقص اهميتها تدريجيا بسبب الانخفاض المستمر فى التعريفات الجمركية تنفيذا لالتزامات مصر ،ووفقا لاتفاقيات منظمة التجارة العالمية.

ومن المبادئ الأسياسية للمالية العامة ان تحدد السلطات العامة فى البداية حجم الانفاق الذى ترغب فى القيام به.تحقيقاً لدورها فى حياة المجتمع وعلى ضوء هذه النفقات يتحدد حجم الايرادات العامة ، التى ينبغى ان تحصل عليها السلطات العامة وهذا مايعرف بمبدأ أولوية النفقات العامة. وقد يقوم بالنفقات العامة الحكومة المركزية او الهيئات المحليه كالمحافظات وكمجالس المدن والقرى..واحيانا يطلق على الأولى النفقات الحكومية او المركزية وعلى الثانية النفقات المحلية.

الايرادات العامة :

تلجأ الدوله فى سبيل تغطيه نفقاتها إلى الحصول على مبالغ أو إيرادات من مصادر متعددة.

مصادر الايرادات

١. عوائد الدوله من ممتلكاتها.

٢. الاقراض العام (الدين العام) :وهذا المظهر اختيارى فى ظاهره ،الا أنه يخفى عنصر من عناصر الإكراه حيث يسدد فى الغالب من عائد الضرائب التى تفرض فى المستقبل فهو نوع من الضرائب المؤجله.

٣. الرسوم : مبالغ تفرض مقابل خدمة تؤدى إلى الفرد ولاتتناسب قيمتها مع تكلفه الخدمة ، فقد تكون الرسوم اقل اى ان الدولة تحملت جزء منها مساهمه منها مع الافراد،وقد تكون او تكون اكبر من امثلة ذلك الخدمات التعليميه ،الحصول على جواز سفر استخراج رخصه قيادة

٤. الضرائب :

الضريبة هى (اقتطاع مالى من دخول وثروات الأشخاص الاقتصادية – طبيعيه ومعنويه-تحصل عليها الدولة جبرا منهم بمقتضى ما لديها من سلطة سياديه وقانونية دون مقابل لدفعها.

(وذلك لتمكين الدولة من تحقيق اغراض السياسه المالية)

وتعتبر الضرائب اهم صور الايرادات السيادية للدولة .

من اهم المبادئ القانونية للضرائب مايلى :

-لاتفرض ضريبه الا بمقتضى قانون عام ، ولا يعفى منها أحد الابقانون.

-المساواة بين المولين فى المعامله امام الضرائب.

-الضريبه اسهام من الافراد فى تحمل النفقات العامة وليست عقوبة عليهم ، وبالتالى تخلتف الضريبه اختلافا تاماعما يحدث احياناً من مصادره الاموال.

وبالاضافة الى ضرورة مراعاة هذه الاعتبارات القانونية لتحقيق حماية حقوق الأفراد ،فان كفاءة السياسه الضريبية تتطلب ان تراعى ايضا عدة مبادئ اهمها :

أ- مبدأ العدالة والمساواة : وهو يعنى أن يتم توزيع اعباء الضرائب على الافراد مع مراعاة ظروفها النسبيه من حيث

- **الماليه العامه والديمقراطيه السياسيه :**

عندما نتحدث عن دور الدولة فى النشاط الاقتصادى كما تحدده قواعد المالية العامة : فينبغى أن نتذكر أمرين على قدر كبير من الأهميه :

الامر الاول :فهو ان تدخل الدولة فى الحياة الاقتصادية باساليب المالية العامة يتم عن طريق استخدام السلطة او القهر القانونى،فإشباع الحاجات العامة والاجتماعية لايتم عن طريق الرضاء الطوعى للأفراد، كما يعبر عنه سلوكهم فى السوق ،وانما يتم عن طريق الخضوع لقرارات وأوامر السلطة العامة .الأمر الثاني الدوله ليست كيانا متميزا من انواع خاصة من البشر ،وإنما الدولة هى مجموعه من الاجهزة والمؤسسات التى تجمع أفراد عاديين،ومن الممكن إذا لم تتوافر ضوابط مناسبة ان تتحول تلك السلطة فى ايدى هذه الاجهزة والمؤسسات الى وسيلة لخدمة مصالحهم الخاصه والمباشرة باسم المصلحة العامه ٠ وهنا لابد من توافر الديمقراطيه بحيث لا تستخدم هذه السلطة الا فيما يعود بالخير على المواطنين ،ولذلك،،لم يكن غريبا ان يكون تطور الديمقراطيه السياسيه فى العالم مرتبطاً بموضوع الضرائب،التى تفرضها الحكومات لتمويل سياستها التدخليه فى حياة المجتمع،وقد بدأت المطالبة بالمشاركة الشعبية فى الحياة السياسيه نتيجه لإصرار الشعوب على ألاتفرض عليها ضرائب دون موافقة ممثلى الشعب على هذا الفرض،ولذلك تقرر معظم دساتير العالم أن الضرائب لاتفرض ولا تعدل إلا بقانون يوافق عليه ممثلو الشعب .

ولا ينبغى أن تقتصر موافقة الشعب على مايفرض على المواطنين من أعباء،وانما يجب أن تمتد ايضا الى اختيار الوجوه التى تتفق عليها هذه الضرائب ، حتى لاتهدر اموالهم فى استخدامات لا طائل من ورائها .بذلك ترتبط الديمقراطية بكل من الإيرادات العامه والنفقات العامة .

- **عناصر المالية العامة :**

وهى تتمثل فى النفقات العامة ،الايرادات العامة ، الموزانه العامة

النفقات العامة :

يقصد بالنفقات العامة : المبالغ النقدية التى تنفقها الدولة بما فى ذلك الهيئات والمؤسسات العامة بقصد إشباع الحاجات العامة والاجتماعيه تحقيقا لدورها فى المجتمع . ويتعين التأكيد هنا على ان هدف النفقات العامة هو تحقيق نفع فى اشباع حاجه عامه أو اجتماعيه ،وبالتالى فإنه لا يجوزان تنفق الدولة مبالغ لتحقيق منافع خاصة لبعض الأفراد أو الفئات بالنظر لما يتمتعون به من نفوذ سياسى او غيره ،وإذا كان تدخل الدولة فى المجالات المختلفة ظاهرة عامة فى جميع الدول–فإن حجم هذا التدخل يختلف من دولة الى اخرى،وفى الدولة نفسها من فتره الى أخرى،ومع ذلك فقد كان هناك اتجاه عام لاستمرار تزايد النفقات العامه ،حتى اعتقد البعض ان هناك مبدأً قانونياً اقتصادياًيشير الى ضرورة استمرار تزايد النفقات العامه (مبدا تزايدالنفقات العامة) .وقد ساعد على الاعتقاد بهذا المبدأ ماعرفه العالم بوجه عام من تزايد مستمر فى حجم النفقات العامه للحكومات وكذلك نسبتها الى الدخل القومى نتيجة للاتساع المستمر فى مجالات نشاطها – ومع ذلك فقد بدات تظهر فى السنوات الاخيرة دعوة فى عدد من الدول إلى خفض النفقات بالرغبة فى تخفيف اضرار البيروقراطيه .ومظاهر عدم الكفاءه فى الاجهزة الحكوميه.

ثانيا : بالنسبة للهدف المباشر من القيام بعملية الإنتاج (أو الاستهلاك)

يعتبر تعظيم العائد الشخصى هو الهدف المباشر الذى يبتغيه كل فرد (او جماعه من الأفراد) من قيامه بنشاطه الإنتاجى (سواء كان إنتاجا سلعيا اوخدميا) أو استهلاكياً . فالمبادره الفرديه والحافز الفردى يعتبران بمثابه المحرك الرئيسى لكل النشاط الاقتصادى بشرط ضمان وجود المنافسه الحره .

ثالثا : بالنسبه لكيفية إتخاذ القرارات

تعتبر آلية قوى السوق (أو الية الأثمان) هى الآلية الرئيسيه التى يعتمد عليها المنتجون والمستهلكون فى إتخاذ قراراتهم ، بهدف تعظيم عائدهم الشخصى .. بمعنى آخر يتوقف اتخاذ قررات الانتاج والاستهلاك على الاثمان السائدة (او المتوقعة) والتى تحدد وفقا للتفاعل الحر القوى (العرض) و يمكن تعريفه (الكمية التى يرغب ويتمكن المنتجون من بيعها من السلعة عند الأسعار المختلفه لها خلال فترة زمنيه معينة) و(الطلب)ويمكن تعريفه (الكمية التى يرغب ويتمكن الأفراد من شرائها من السلعة عند الأسعار المختلفه لها وخلال فترة زمنية معينه) وذلك فى سوق تسوده المنافسة. وفى هذا الاطار برز مصطلح (الخصخصة) ليعكس جانبا من هذه التغيرات .**فالخصخصه تعنى اعادة توزيع الأدوار بين الدوله والقطاع الخاص فى ملكيه وإداره وسائل الإنتاج فى المجتمع**.وبناء عليه تأخذ الخصخصه صوراً متعددة اهمها ما يلى :

أ - **خصخصه الملكيه** : من خلال تحويل جزء من وسائل الإنتاج المملوكة للدولة (المشروعات المملوكة للقطاع العام) الى ملكية القطاع الخاص (أفراد أو جماعات).

ب - خصخصه الإدارة من خلال :

١. احتفاظ الدول بالملكية مع التوسع فى التعاقد مع القطاع الخاص للقيام بمهام الإداره بالكامل ، أو التوسع فى تاجير الوحدات للقطاع الخاص ، او التوسع فى ابرام عقود التوريد المختلفه وعقود اداء الخدمات مع القطاع الخاص .

٢. احتفاظ الدولة بالملكيه والإداره مع إجراء تغير جذرى فى أسلوب الإداره على نحو مماثل لاسلوب الإداره فى القطاع الخاص (أساليب التعيين وإنهاء الخدمة.أساليب الثواب والعقاب . إمكانية إنهاء الخدمة..الخ)

ج -السماح للقطاع الخاص بانشاء وتملك وإدارة مشروعات :

وهى المشروعات التى كانت تقليدياً مملوكة للدولة ،مثل إنشاء وإدارة الطرق ، ومحطات توليد الكهرباء ، ومحطات مياه الشرب والصرف الصحى والسجون..الخ.

والواقع ان الخصخصه لاتعنى (كما يعتقد البعض) تراجع دور الدولة فى إدارة شئون المجتمع،وإنما تعنى(على العكس) إعادة هيكلة هذا الدور ، بحيث تتحول الدولة عن القيام بدور مباشر فى عملية الإنتاج والتوزيع ،تاركة المهمة للقطاع الخاص ، على أن تتفرغ الدولة لوضع السياسات اللازمه لتهيئه المناخ الملائم لقيام القطاع الخاص بهذا الدور وتفعيله ورقابته .

عن طريق استبعاد السوق كلية والحلول محلها ، بل قد ترى الدولة أن تستمر فى الاعتماد على السوق مع توفير بعض الترتيبات الخاصة المكملة لها ، ولذلك .. فإن تدخل الدولة يأخذ أشكالا مختلفة . فهى قد تنشئ المستشفيات ودور العلاج الحكومية إلى جانب المستشفيات ودور العلاج الخاصة لتطوير الخدمات الصحية . وهى قد تضع أنواعا من التأمين الصحى أو تقدم إعانات للفقراء والمحتاجين من المرضى .

٢. تحقيق الاستقرار والنمور الاقتصادى :

كان الرأى السائد حتى بداية هذا القرن أن النشاط الاقتصادى هو مسئولية الأفراد ، وأن دور الدولة يقتصر على توفير الظروف والأوضاع القانونية والمادية المناسبة لكى يقوم الأفراد بنشاطهم الاقتصادى فى حرية كاملة . ومع ذلك فإنه نتيجة لما نشأ من تقلبات اقتصادية شديدة أدت إلى مشكلات عديدة مثل البطالة (تعنى عدم وجود فرص عمل لمن يرغب فى العمل وقادر عليه وفى سن العمل) ، ومشكلة التضخم (وهى تعنى ارتفاع ملموس ومستمر عبر الزمن فى الأسعار أى ناتج عن زيادة الطلب عن العرض) .. قد استقر الرأى على أن مسئولية الدولة تتضمن التدخل لتحقيق مستوى معقول من النشاط الاقتصادى وتوفير قدر من الاستقرار فى مستويات الأسعار ، بحيث أصبحت الدولة تتدخل فى النشاط الاقتصادى لتحقيق معدلات من النمو أو توفير الظروف المناسبة للتنمية الاقتصادية . ويتطلب هذا التدخل من الدولة التأثير فى ظروف الاستثمار وفى شروط الائتمان وتوفير العمل واستقرار العملة الوطنية فى مواجهة أسعار العملات الأخرى ، وغير ذلك من مظاهر السياسات الاقتصادية .

٣. تحقيق عدالة التوزيع :

لا يقتصر دور الدولة على توفير السلع والخدمات العامه والاجتماعية فى ظروف مناسبه وتحقيق الاستقرار والنمو الاقتصادي ، بل إ الدولة تتدخل أيضا لتحقيق المزيد من العدالة فى توزيع الدخل القومى بين الافراد.

ويتحقق ذلك عن طريق التاأثير فى توزيع المزايا والأعباء.على المواطنين بشكل يساعد على تقريب الفوارق بين الطبقات ويزيل الإحساس بالظلم بين الأفراد.وبطبيعة الحال..فإن العداله فى التوزيع تراعى فى الوقت نفسه اختلاًف الإسهام فى الإنتاج ودفع عملية النمو.فليس من يعمل كمن لا يعمل..فالعداله فىالتوزيع تقتضى توفير الفرص المتساويه لجميع المواطنين دون تميز،وبحيث لا يضار احد فى قدرته على التقدم والنجاح بسبب راجع إلى الإرث أو النسب أو اللون أو الدين أو غير ذلك من الأسباب ، التى لاتؤدى الى الإسهام فى دفع حركة المجتمع إلى الأمام.

- **الخصخصة :**

يقوم النظام الإقتصادى الرأسمالى السائد عالميا الأن على عدة دعائم رئيسه ، اهمها مايلى :

أولا : بالنسبة لملكيه وسائل الإنتاج فى المجتمع :

تسود الملكيه الخاصة لهذه الوسائل بمعنى أنها تكون غالبيتها مملوكة خاصة لأفراد أو لجماعات،الأمر الذى يعنى فى المقابل الحد من ملكية الدولة لوسائل الإنتاج الى حد ممكن للإعتقاد بان الآفراد(القطاع الخاص) هم أكثر كفاءة من الدولة ومؤسساتها العامة فى القدرة على التشغيل الأمثل لموارد المجتمع المحدودة الأمر الذى يحقق فى النهاية صالح المجتمع ككل.

- **قصور السوق عن توفير الخدمات العامة الاجتماعية**

يقوم نظام السوق فى توفير السلع والخدمات على مبدأ المصلحة الذاتية ولا ينجح فى توفير بعض الخدمات العامة كليا أو جزئيا ، ومن ثم لا بد من توفير هذه الخدمات عن طريق آخر ، وهو طريق الدولة باستخدام أسلوب السلطة أو القهر القانونى

- **قصور نظام السوق عن توفير الخدمات العامة والاجتماعية**

أ – أسباب قصور السوق عن توفير الخدمات العامة

يقصر نظام السوق عن توفير الخدمات العامة للأسباب التالية :

١. لا يوجد بها دافع ذاتى يجعل الأفراد تعلن مسئوليتها عن القيام بها .

٢. طالب الخدمة هو الذى يتحمل تكلفتها .

٣. لا يشاركه أحد فى تحمل نفقاتها .

٤. لا يمكنه منع الآخرين من الاستفادة منها متى توفرت .

٥. يمكنه الاستفادة منها بدون أى تكلفة متى توفرت من غيره .

ولذلك فلا بد من تدخل الدولة باستخدام أسلوب السلطة أو القهر من خلال الضرائب وغيرها من الموارد السيادية

ب – أسباب قصور السوق عن توفير الخدمات الاجتماعية

ملاحظة(رغم وجود دافع ذاتى بها ، إلا أنه ليس بإمكان كل الأفراد القيام بها)

وهكذا يتضح أن السوق لا يصلح وحده لإشباع الحاجات وأنه حتى فى الدول التى تأخذ بنظام السوق .. لا بد من وجود دولة قوية تقدم الخدمات العامة والاجتماعية هو أمر ضرورى ولازم للاقتصاد ، وهذا هو مجال المالية العامة .

- **دور الدولة فى النشاط الاقتصادى :**

إذا كانت فكرة الخدمات العامة والاجتماعية هى الأساس فى دور الدولة فى المجتمع وبالتالى أساس المالية العامة ، فقد يكون من المناسب مع ذلك تحديد المجالات الاقتصادية الأخرى التى تتدخل فيها الدولة .

ولكن ينبغى أن يكون معلوما أن التفسير النهائى لكافة أشكال تدخل الدولة يظل هو فكرة المصلحة العامة بالمعنى الواسع .

- **ونتناول هنا أهم هذه المجالات :**

١. إشباع الحاجات العامة والاجتماعية :

اشرنا إلى دور الدولة فى إشباع الحاجات العامة والاجتماعية ، وعادة تقوم الدولة بتوفير الخدمات العامة ، كما تتدخل للتأكد من إشباع الحاجات الاجتماعية ، وليس من الضررورى أن يكون تدخل الدولة فى إشباع الحاجات الاجتماعية

• أنواع الحاجات

يمكن تقسيم الحاجات من حيث شيوع النفع الى،

١. حاجات خاصة (فردية)

- تخضع لمبدأ القصر أو الاستئثار .
- يمكن منع الآخرين من الإستفاده منها .
- مد الخدمة للغير يتطلب أعباء إضافية أو حرمان المستفيد من جزء من الخدمه مثل (المأكل – الملبس – المأوى)

٢. حاجات عامة وتنقسم إلى ،

أ – عامة مطلقة

- يشيع نفعها على الأفراد بمجرد توافرها .
- لا يمكن منع الأخرين من الإستفادة بها .
- مد الخدمة لا يتطلب أعباء إضافية .

مثل (العدالة والأمن)

ب – عامة تخضع لمبدأ القصر

- يمكن منع الأخرين من الاستفادة بها .
- مد الخدمة لا يتطلب أعباء إضافية .

مثل (مد جسر على نهر لمزرعة خاصة) .

٣. حاجات اجتماعية

- فى ظاهرها فردية .
- مد الخدمة يتطلب أعباء إضافية .
- تخضع لمبدأ القصر .
- لها نفع يعود على الآخرين ولا يمكن تجاهل أثره .
- مثل (التعليم والصحة)

الفصل الرابع

المالية العامة ودور الدولة

الأهداف

يصبح الطالب فى نهاية دراسته لهذا الفصل قادرا على أن :

١. يميز بين الحاجات الفردية و الحاجات العامة و الحاجات الاجتماعية .
٢. يفسر قصور السوق عن توفير الخدمات العامة والاجتماعية .
٣. يشرح المجالات الثلاثة التى توضح دور الدولة فى النشاط الاقتصادى .
٤. يحدد مفهوم الخصخصة وصورها .
٥. يحدد مفهوم النفقات العامة .
٦. يوضح مبدأ أولويات النفقات العامة .
٧. يميز بين الضريبة والرسم .
٨. يحدد المبادئ القانونية والعامة لتحقيق كفاءة السياسة الضريبية .
٩. يحدد مفهوم العدالة الضريبية .
١٠. يحدد مفهوم الموازنة العامة .
١١. يميز بين مبدأ سنوية الموازنة العامة من جهة ، ومبدأ وحدتها من جهة أخرى .
١٢. يبين التطور الذى لحق بمبدأ توازن الموازنة العامة فى العصر الحديث .

تمهيد :

تمثل المالية العامة فرع علم الاقتصاد ، الذى يدرس دور الدولة فى تقديم الخدمات العامة والاجتماعية ، وكيفية تمويل ذلك عن طريق الإيرادات العامة وخاصة الضرائب ، وهكذا تعبر المالية العامة عن التفسير الاقتصادى لدور الدولة فى الحياة العامة ، ونطاق هذا الدور ، والأساليب المستخدمة لتحقيقه .

وتبرز أهمية المالية العامة بوجه خاص فى الدول التى تأخذ بنظام الاقتصاد الرأسمالى (اقتصاد السوق) : وهو يعنى حرية الملكية الخاصة لوسائل الإنتاج ، ويتحكم فى الأسعار العرض والطلب . ففى هذه الأحوال لا يكفى تنظيم السوق لإشباع جميع الحاجات ولا بد من تدخل الدولة لتقديم قدر من الخدمت العامة والاجتماعية التى تعجز السوق عن توفيرها . وبذلك تلح الحاجة لوجود دور للدولة ومجال للمالية العامة إلى جانب السوق .

أما فى الدول التى تأخذ بالنظام الاقتصادى الاشتراكى : ويعنى ملكية الدولة للجزء الأكبر من وسائل الإنتاج والثروة فى المجتمع ، والدولة هى التى تتحكم فى الأسعار بحيث يختفى أو يتضاءل دور السوق ولا يظهر دور الدولة فى إشباع الحاجات العامة متميزا عن دورها بشكل عام فى الحياة الاقتصادية .

٢- أعط مفهوما اقتصاديا لكل عبارة من العبارات الآتية :

أ – مقدار السلع والخدمات التى يمكن الحصول عليها فى السوق مقابل الدخل النقدى .

ب – الإنفاق على السلع والخدمات بقصد إشباع الحاجات مباشرة .

ج – الإنفاق من أجل الإضافة إلى ثروة البلاد الإنتاجية .

٣- قارن بين :

أ – الدخل النقدى والدخل الحقيقى .

ب – الإنتاج القومى والناتج القومى

جـ - دخول الملكية ودخول العمل .

أسئلة الفصل الثالث

١- ضع دائرة حول الحرف الذى يمثل الإجابة الصحيحة فيما يلى :

- أيها أكثر دلالة على مستوى النشاط الاقتصادى ؟

أ- الدخل القومى .

ب – الناتج القومى .

ج – النمو الاقتصادى .

د – الإنتاج القومى .

- يتمثل الفرق بين الإنتاج القومى والناتج القومى فى .....

أ – القيمة المضافة .

ب – متوسط دخل الفرد .

ج – قيمة الاستهلاك .

د – قيمة الاستثمار .

- يتمثل الإنفاق القومى فى مجموع الإنفاق على ....

أ – الاستهلاك .

ب – الاستثمار .

ج – السلع والخدمات .

د – الاستهلاك والاستثمار .

- يتمثل الفرق بين الدخل النقدى والدخل الحقيقى فى التأثر بـ .....

أ – متوسط دخل الفرد .

ب – تغير مستوى الأسعار .

ج – المنفق على السلع الاستثمارية

د – المنفق على الاستهلاك .

عزيزى الطالب ستتعرف على كل من الاستهلاك والاستثمار

١. **الاستهلاك :** يعنى الإنفاق على السلع والخدمات بقصد إشباع الحاجات مباشرة ، وقد يكون الاستهلاك خاص أو عام .

أ – الاستهلاك الخاص : يقصد به الإنفاق على السلع والخدمات بقصد إشباع الحاجات الفردية (شراء المنتجات الغذائية ...)

ب – الاستهلاك العام : يقصد به إنفاق السلطات العامة بقصد إشباع الحاجات الجماعية (التعليم – الصحة .. الخ)

ملاحظة هامة : يواجه الاستهلاك مشكلة قياس الاستهلاك ، لذلك يتم قياس استهلاك السلعة بمجرد شراء الفرد لها .

مثال : السيارة هى من السلع المعمرة ومن يشتريها لم يقصد استهلاكها فى الحال ، ولأسباب عملية بحتة ، يعتبر أن السيارة قد تم استهلاكها بمجرد الشراء .

يتضح لنا مما سبق أن الاستهلاك هو الجزء من الدخل القومي ، الذى ينفق للحصول على السلع الاستهلاكية .. وأما ما يتبقى من الدخل القومى يطلق عليه .. الادخار .

والآن .. نتعرف على الادخار

٢. **الادخار**

هو عملية سلبية تمثل جزء من الدخل ، لم ينفق للحصول على السلع الاستهلاكية .

إذن الادخار = الدخل القومى – الاستهلاك .

٣. **الاستثمار**

ويقصد به الإنفاق من أجل الإضافة إلى ثروة البلد الإنتاجية فى الفترات القادمة ، أى الإضافة إلى رصيد المجتمع من الأصول الرأسمالية التى تمكن من زيادة القدرة الإنتاجية مثل (الآلات – المبانى – الخ)

أى أن المجتمع لا يستخدم كامل قدرته الإنتاجية المتاحة لإنتاج سلع وخدمات استهلاكية ، بل يخصص جزء للإضافة لرأس المال الثابت ، والمخزون السلعى ورأس المال المتداول بهدف إنتاج السلع أو الخدمات فى المجتمع .

- **مفهوم متوسط الدخل**

متوسط الدخل : يقصد به ما حصل عليه كل فرد من الدولة من دخل فى المتوسط خلال عام ما ، ويتم تقديره بالمعادلة التالية

$$\text{متوسط الدخل} = \frac{\text{الدخل القومى للدوله فى العام المذكور}}{\text{عدد سكان هذه الدولة فى ذلك العام}}$$

– إذن كلما زاد مقدار الدخل القومى بالنسبة إلى عدد الأفراد فى الدولة زاد متوسط الدخل .

١. طريقة الناتج القومى

للتعرف على الناتج القومى فلا بد من التعرف على الإنتاج القومى ، فيمكن تعريفه بأنه (مجموع ما أنتج فى الاقتصاد من سلع وخدمات خلال فترة زمنية معينة ، وقد يرتبط الإنتاج بالسلع المادية وغير المادية) .

مثال : أحد المشروعات يقوم بإنتاج الصلب ، ويقوم مشروع آخر بإنتاج السيارات ، فإنه يمكن القول بأن المشروع الأول ينتج ما قيمته كذا من الصلب ، وأن المشروع الثانى ينتج ما قيمته كذا من السيارات . و إذا أردنا معرفة إنتاج المشروعين معا ، فأنه لا يكون حاصل جمع إنتاج المشروعين،والسبب فى ذلك هو أن جزء من الصلب سيحسب مرتين : مرة باعتباره إنتاجا للمشروع الأول ، ومرة باعتباره جزءا من إنتاج المشروع الثاني وهو السيارات (وهو ما يعرف بالإزدواج المحاسبى)

- ولتجنب خطر الازدواج المحاسبى ، ينبغى أن يقدر الإسهام الإنتاجى للاقتصاد القومى وفقًا لما سمى بالقيمة المضافة أو قيمة الإنتاج المضاف .

- وهنا يظهر مفهوم الناتج القومى (الذى يعبر عن مجموع الإسهام الإنتاجى للمشروعات فى اقتصاد معين خلال فترة معينة (سنة فى العادة)

إذن لقياس الإسهام الإنتاجى لأحد المشروعات فى الناتج ، فإنه ينبغى الاقتصار على ما يضيفه هذا المشروع إلى قيمة السلعة التى ينتجها (أى القيمة المضافة)

٢. طريقة الأنصبة الموزعة

تهتم هذه الطريقة بحساب الدخل القومى من حيث توزيعه على عناصر الإنتاج فيتم تقدير الدخل القومى بجمع دخول عناصر الإنتاج المختلفة التى ساهمت فى النشاط الإنتاجى ، وتتمثل هذه الدخول فى دخول العمل و تعنى الأجور والمرتبات والمكافآت ودخول الملكية تتمثل فى الأرباح والفوائد والريع

يجب استبعاد :

أ- المتحصلات الأخرى التى لا ترتبط بالإسهام فى الإنتاج مثل الإعانات الاجتماعية – إعانات البطالة .

ب- الكسب والخسارة والرأسمالية

مثال : قد يبيع أحد الأفراد بعض الأصول (منزل مثلا) بثمن أعلى مما اشتراه به . وهو ينظر إلى الكسب الرأسمالى كنوع من الدخل ، ولكن هذا الإيراد لم ينتج عنه إسهام فى الإنتاج ولذلك لا يدخل فى حساب الدخل القومى .

٣. طريقة الإنفاق القومى

تعتمد هذه الطريقة على احتساب كافة المبالغ التى تم إنفاقها فى المجتمع من قبل الأفراد والمشروعات والهيئات الخاصة والعامة على شراء السلع والخدمات المنتجة فى الاقتصاد خلال فترة معينة (عادة سنة) .

ويمكن تعريف الانفاق القومى بأنه (مجموع ما أنفق خلال فترة معينة على الاستهلاك والاستثمار فى الاقتصاد القومى وذلك خلال فترة زمنية معينة .

- **الدخل القومى**

يمكن تعريفه بأنه (مجموع الدخول المكتسبة لجميع أفراد المجتمع ومشروعاته خلال سنة مقابل إسهامهم فى العملية الإنتاجية وينقسم (الدخل القومى) إلى نوعين هما : -

١. الدخل القومى النقدى : ويقصد به كمية النقود التى يحصل عليها أفراد المجتمع من عوائد عوامل الإنتاج مقابل مشاركتهم فى العملية الإنتاجية خلال فترة زمنية معينة وهى غالبا سنة .
٢. الدخل القومى الحقيقى : وهو يمثل مقدار ما يحصل عليه أفراد المجتمع من السلع والخدمات فى مقابل الدخل النقدى ، وهمزة الوصل بين الدخل النقدى والحقيقى هى الأسعار ، فارتفاع الاسعار يعنى انخفاض الدخل الحقيقى والعكس صحيح .

إذن ما يحسب فى الدخل القومى هو الدخول الناتجة عن المساهمة فى العملية الإنتاجية ، كما توجد دخول أخرى يحصل عليها الأفراد ولا يترتب عليها المساهمة فى العملية الإنتاجية وتسمى المدفوعات التحويلية .

المدفوعات التحويلية : هى مدفوعات ليست مقابل خدمات إنتاجية تم تأديتها ، وبالتالى لا تدخل ضمن حساب الدخل القومى ، وسميت مدفوعات تحويلية لأن الدولة حصلتها من الأفراد فى صورة (رسوم - ضرائب - جمارك) ثم حولتها لهم فى صور أخرى مثل (الإعانات الاجتماعية – إعانة البطالة – الهبات – التبرعات) .

- **موارد الدخل القومى :**

١. الريع : العائد الذى يحصل عليه صاحب الأرض مقابل خدماتها التى تساهم بها فى العملية الإنتاجية .
٢. الفائدة : هى كل ما يدفع لصاحب رأس المال مقابل استخدامه أو استعماله ، وهى واجبة الأداء مهما كانت نتيجة هذا الاستغلال أو الاستعمال من ربح يعود على المستغل لـ (رأس المال) أو خسارة تلحق به ، مثل (الفائدة التى نحصل عليها من استثمار الأموال فى البنوك .)
٣. الأجر : هو الدخل الذى يحصل عليه العامل مقابل عمل يقوم به أو خدمة يؤديها لصاحب العمل ، أى أنه ما يحصل عليها العامل البشرى مقابل مساهمته ومشاركته فى العملية الإنتاجية وقد يسمى راتب أو أتعاب أو ماهية .
٤. الربح : المكافأة التى تمنح للعامل مقابل مساهمته ومشاركته فى العملية الإنتاجية .

- **طرق قياس الدخل القومى**

يمكن قياس الدخل القومى باستخدام ثلاث طرق :

١. طريقة الناتج القومى
٢. طريقة الأنصبة الموزعة
٣. طريقة الإنفاق القومى

والآن عزيزى الطالب سنتعرف على كل منهم

الفصل الثالث

الدخل القومى

الأهداف

يصبح الطالب فى نهاية دراسته لهذا الفصل قادرا على أن :

١. يعرف كل من (الدخل القومى – الدخل القومى النقدى – الدخل القومى الحقيقى – الناتج القومى – الإنفاق القومى – الاستهلاك – الادخار – الاستثمار) .

٢. يبدى رأيه فى العبارة القائلة بأن (العبرة بالدخل الحقيقى لان الدخل النقدى يمكن أن يكون مضللًا) .

٣. يحدد موارد الدخل القومى .

٤. يناقش طرق قياس الدخل القومى .

٥. يحدد مدى صحة العبارة القائلة بأن (الدخل القومى هو الوجه المقابل للناتج القومى) .

٦. يبين العـلاقة بين الإدخـــــــــار و الاستهلاك .

٧. يحدد المقصود بالعبارة القائلة بأن (مستوى تقدم الدول يقاس أحيانا بمتوسط الدخل) .

تمهيد :

يهدف النشاط الاقتصادى إلى إشباع حاجات الأفراد غير المحدودة باستخدام الموارد النادرة المتاحة لهم فى ظل ما هو متوافر من معرفة ومعلومات ، ويتم ذلك عن طريق النشاط الإنتاجى الذى يؤدى إلى ظهور الإنتاج القومى .

ومع ذلك فإن الفهم الكامل لعمل الاقتصاد القومى يتطلب الإحاطة بعدد من المفاهيم الأساسية إلى جانب الإنتاج القومى وبصفة خاصة مفهوم الناتج القومى ومفهوم الدخل القومى والاستهلاك والادخار والاستثمار والإنفاق القومى .

اسئلة الفصل الثانى

١- ضع علامة (✓) أو علامة (×) مع ذكر السبب فى الحالتين :

أ- يعتبر رأس المال مجموعة غير متجانسة من الآلات والأدوات .

ب- يمثل رأس المال عنصرا قابلا للدوام .

ج – العمل هو العنصر الإيجابى فى العملية الإنتاجية .

د – تمثل الطبيعة عنصرًا دائمًا ولكنها محدود الكمية .

٢- قارن بين :

أ – خصائص الطبيعة وخصائص رأس المال .

ب – رأس المال الثابت ورأس المال المتداول .

٣- أكتب المفهوم أو المصطلح الاقتصادى الذى تشير إليه كل عبارة من العبارات التالية :

أ – مجهود غائى يهدف إلى خلق المنافع بالإسهام فى إنتاج السلع والخدمات .

ب – كل الموارد والقوى التى يجدها الإنسان دون جهد من جانبه .

٤- ما النتائج المترتبة على ... ؟

أ – الاستغلال السيء للطبيعة .

ب – استهلاك رأس المال الثابت .

٥- ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة من (أ – ب – جـ - د) لكل مما يلى :

(١) أى من العناصر الأتية يمثل عنصر العمل من الناحية الاقتصادية :

أ – عزف الموسيقى لإشباع هوايته .

ب – علاج الطبيب لمرضاه .

ج- قيادة السيارة للتنزه .

د – قضاء وقت فى لعب الشطرنج .

(٢) أى من العناصر الأتية يمثل استهلاكًا اقتصاديًا لرأس المال :

أ – انتهاء العمر الافتراضى لآلة ما .

ب – الاستفادة من إمكانات الآلة فى زيادة الإنتاج .

ج – عدم صلاحية الآلة بظهور الآلات الحديثة تكنولوجيا .

د – زيادة المنفعة الاقتصادية لعناصر الإنتاج .

الإنسان منذ وقت بعيد جدوى الإنتاج غير المباشر ، بأن يقوم أولا بصنع بعض الأدوات والآلات التى يستخدمها بعد ذلك فى الإنتاج بما يحقق الإنتاج بكفاءة أكبر . وهكذا ظهر رأس المال كعنصر من عناصر الإنتاج فى شكل الأدوات والآلات التى يستخدمها الإنسان فى الإنتاج .

- **أنواع رأس المال :**

يمكن تقسيم رأس المال كعنصر من عناصر الإنتاج إلى : -

١. رأس المال الثابت وهو الذى يمكن استخدامه مرات عديدة فى الإنتاج ، دون أن يفقد خصائصه الأساسية ، ومن أمثلة رأس المال : الآلات وأدوات العمل والتجهيزات الفنية والإنشاءات ، ويطلق عليها أحيانا الأصول الإنتاجية .

٢. رأس المال المتداول : وهو الذى يستخدم مرة واحدة فى عملية الإنتاج يفقد بعدها شكله الأول ويختفى فى نهاية الأمر فى السلعة المنتجة كجزء منها . ومن أمثلة المواد الأولية والوسيطة والوقود ، ويطلق عليها أحيانا (رأس المال الجارى) .

- **خصائص رأس المال :**

١. عنصر صنعه الإنسان : حيث يعتمد تكوين رأس المال على الادخار (وهو التضحية بجزء من الاستهلاك فى الوقت الحاضر) وتنقسم الدول من حيث قدرتها على الإدخار إلى نوعين متقدمة لديها قدرة كبيرة على الادخار وبالتالى كم كبير من رأس المال وإنتاجية عالية على عكس الدول النامية .

٢. قابل للهلاك : ومن ثم ينبغى تجديده حيث يتعرض رأس المال الثابت لنوعين من الاستهلاك هما :

أ – الاستهلاك المادى : حيث ان استخدام رأس المال فى الإنتاج يؤدى إلى إهلاكه ماديا

مثال : آلات يصيبها التلف والتآكل بمرور الزمن ونتيجة لكثرة الاستخدام .

ب – الاستهلاك الاقتصادى : يرجع إلى ما يحدثه التقدم الفنى وتغير الأذواق من فقد رأس المال لقدرته الإنتاجية بكفاءة .

مثال : ظهور آلات وأجهزة جديدة قادرة على الإنتاج بتكاليف أقل ، أو نتيجة لتغير الأذواق وتقلص الطلب على السلعة .

ملاحظات هامة :

١- يثير استهلاك رأس المال بنوعية مشاكل محاسبية عديدة ، وينبغى على أى نظام اقتصادى ناجح أن يعمد إلى الاحتفاظ بقيمة رأس المال المتاح لديه ، عن طريق تعويض استهلاك رأس المال بنوعية بشكل مستمر .

٢- تنطوى التنمية الاقتصادية إلى حد بعيد على العمل على زيادة حجم رأس المال المتاح للاقتصاد القومي ، حيث لا تتوقف التنمية الاقتصادية على حجم رأس المال فقط بل تعتمد وبدرجة كبيرة على مدى تطور العنصر البشري .

- **أنواع العمل**

يختلف العمل المبذول من مهنة إلى أخري ، ويتم التقسيم طبقًا للصفة الغالبة على نوع العمل فيمكن تقسيمه إلى أعمال يدوية « عضلية » تعتمد على الجهد العضلي ، وأعمال ذهنية تستند إلى المعرفة ، وفى الواقع لا يوجد عمل يدوى يعتمد فقط على الجهد العضلى دون استخدام الملكات الذهنية ، وبالمثل لا يوجد عمل ذهنى تماما لا يتطلب أى جهد بدنى

ثانيا : الطبيعة

العنصر الثانى من عناصر الإنتاج ، وهى تعنى كل الموارد والقوى التى يجدها الإنسان دون جهد من جانبه وهى هبة من صنع الله كما أنها محدودة الكمية من أمثلتها الأرض ، المناجم ، الغابات ، مساقط المياه ، إلخ

تؤثر الموارد الطبيعية تأثيرا كبيرا فى النشاط الاقتصادي ، فوجود مناجم وأراضى وغير ذلك يؤثر على طبيعة النشاط الاقتصادى ، ومن هنا دخل بعد المكان إلى دراسة الاقتصاد ، وهذا لا يعنى أن هناك حتمية جغرافية لا مفر منها لأن الإنسان استطاع التغلب على قيود الموقع أو المكان من خلال التجارة الدولية .

- **خصائص الموارد الطبيعية**

١. خاضعة للحقوق القانونية : يهتم علم الاقتصاد بالموارد النادرة ، وهذا الأمر يعنى اختيار لبعض الأهداف والتضحية بأهداف أخرى كان ممكن تحقيقها باستخدام نفس الوسيلة ، وهذا الأمر يستلزم الاعتراف بوجود سلطة على هذه الموارد تسمح باختيار الهدف الأمثل ، وهذا يتطلب الإعتراف بوجود سلطه وهى فكرة الحق .

٢. هبة من الله : رغم أن الطبيعة هبة من الله فإنها معطاءة وغير منتجة ، ونادرًا ما تستخدم بصورتها الأولية ، بل لا بد من تدخل الإنسان لذلك تكاد تكون مصنوعة .

٣. غير قابلة للهلاك : رغم أن الطبيعة غير قابلة للهلاك إلا أن الإنسان أساء استغلالها بشكل جعلها أقل صلاحية لإشباع حاجاته .

وبذلك نجد أن الصفتان لا تتحققان بشكل كامل ، فالأمر يحتاج لمزيد من التروى .

- **الموارد الحرة والحفاظ على البيئة**

يعتبر الهواء ومياه البحر من الموارد الحرة ، أى لا تخضع لأى سيطرة وليس هناك حدود لاستخدامها ، ولكن من زاويا معينة تكاد تكون هذه الموارد نادرة أيضا ، فإذا نظرنا إلى مدى التلوث الذى يلحق بالهواء ومياه البحر لأدركنا أننا نعبث بموارد متاحة ، ومن هنا فيجب على الحكومات فرض القيود اللازمة للحفاظ على البيئة .

ثالثا : رأس المال .

وهو العنصر الثالث من عناصر الإنتاج ، وهو مجموعة غير متجانسة من الآلات والأدوات والأجهزة المصنوعة ، التى تساعد عند استخدامها فى عملية الإنتاج على زيادة إنتاجية العمل وخلق مزيد من السلع والخدمات .. فقد اكتشف

- **أقسام عناصر الإنتاج**

يتم تقسيم عناصر الإنتاج إلى مجموعتين أو ثلاث مجموعات كبيرة ، فهناك الموارد البشرية ، وهناك الموارد الطبيعية ، وهناك الموارد المصنوعة ، وهذا التقسيم يتفق مع التقسيم التقليدى لعناصر الإنتاج إلى العمل ، والأرض ، ورأس المال ، ويفضل بعض الاقتصاديين المحدثين تقسيم عناصر الإنتاج إلى مجموعتين فقط العمل ورأس المال ، لأن الاتجاه المعاصر يرى الطبيعة غير متميزة عن رأس المال .

ويلاحظ أنه لا جدال فى أن العمل هو العنصر الإيجابى فى عملية الإنتاج ، فالاقتصاد شأنه شأن كل العلوم ، لم يقم إلا بالإنسان وللإنسان .

أولا : العمل

- **ماهية العمل**

العمل عنصر من عناصر الإنتاج فهو الجهد الإنسانى المبذول من خلال العملية الإنتاجية بقصد إنتاج السلع والخدمات .

وهنا لا يجب النظر إلى إدارة عنصر العمل كمورد اقتصادى عادى ولكنه عنصر إنسانى و لذلك يجب مراعاة هذا الإعتبار الإنساني من حيث تنظيم ساعات العمل والإجازات والأجر الذى يحصل عليه العامل لأنه لا يكون فى مقابل جهده فقط وإنما دخل يحدد مستوى معيشته أيضًا .

- **خصائص العمل**

يتميز العمل كعنصر من عناصر الإنتاج بالآتى .

١. نشاط واع وإرادى .

أ – نشاط واع : الإنسان يعيش فى الطبيعة فهو وحده الذى يعيها ويستوعبها ويحولها ويغيرها ويطورها .

ب – نشاط إرادى : فإنه يفترض أن الإنسان يقوم بالحساب الاقتصادى ويقارن بين العائد الذى يعود عليه من بذل هذا النشاط والتكلفة التى يتحملها .

٢. العمل مؤلم بطبيعته

يمكن النظر إلى الألم الذى يصاحب العمل باعتباره التكلفة والتضحية التى يتحملها من يقوم بالعمل ، ويكون هذا الألم ناتج عن الإرهاق البدنى أو العصبى ولكن العمل هو مصدر المتعة والسعادة أيضا ، فعندما يرى العامل نجاحه وما ينجزه تتحقق السعادة والرضا .

١. مجهود غائى

يهدف إلى المشاركة فى إنتاج السلع والخدمات ، وإذا كان الجهد الذى يبذله الإنسان لا يهدف إلى الإنتاج فإنه لا يعتبر عملًا بالمعنى الاقتصادى .

الفصل الثانى

عناصر الإنتاج

الأهداف

يصبح الطالب فى نهاية دراسته لهذا الفصل قادرًا على أن :

١. يذكر خصائص العمل كمنصر من عناصر الإنتاج .

٢. يحدد الخصائص المميزة لكل من الطبيعة ورأس المال .

٣. يضع تبريرا لخضوع عنصر الطبيعة لمجموعة من الحقوق ، على الرغم من كونها هبة من الله .

٤. يضع تعريف لرأس المال باعتباره عنصرًا من عناصر الإنتاج .

٥. يفرق بين رأس المال الثابت ورأس المال المتداول .

٦. يوضح المقصود باستهلاك رأس المال ويحدد أنواع هذا الإستهلاك .

تمهيد

المقصود بالإنتاج

رأينا فيما سبق كيف أن إشباع الحاجات يقتضى القيام بالإنتاج ، فلكى يقوم الفلاح بإنتاج القمح عليه أن يبذل جهدًا فى بذر البذور والقيام بالعمليات الزراعية المختلفة من حرث ورى وحصاد ... إلخ ، ولا بد من وجود تربة صالحة للزراعة ، ومن توافر كميات مناسبة من المياه ، وكذلك قد يحتاج الأمر إلى بعض أنواع المخصبات والمبيدات الكيماوية ، وعادة لا يبذل الفلاح جهدا مستقلًا إذ قد يستعين بطاقات الحيوان فى الجر والحرث ، وربما ببعض الطاقات الميكانيكية مثل قوة البترول أو الكهرباء فيما يستخدم من آلات لرفع المياه أو لرش المبيدات .

أسئلة الفصل الأول

١- أى العبارات الأتية صحيح وأيها غير صحيح مع ذكر السبب فى الحالتين :

أ. تتناقص المنفعة الحدية تدريجيًا مع تناقص الوحدات المستخدمة .

ب . قد تكون السلعة إنتاجية أو استهلاكية على حسب الغرض المخصص لها .

٢- ما المقصود بالمفاهيم الاقتصادية التالية :

أ . الحاجات .

ب . الموارد .

جـ . علم الاقتصاد.

٣- بم تفسر ؟

أ . الحاجات البشرية هى المحرك الأساسى لكل نشاط اقتصادى .

ب . الأهمية الاقتصادية للمعلومات .

جـ . المشكلة الاقتصادية مشكلة ندرة واختيار .

٤- تخير الإجابة الصحيحة مما بين الأقواس :

أ – يطلق على الموارد النادرة اسم الموارد ......

« الحرة – الاقتصادية – الاستهلاكية – الإنتاجية »

ب – يهتم علم الاقتصاد بالموارد الأكثر ......

« ندرة – أهمية – ضرورة – إشباعا »

جـ – تتمثل المشكلة الاقتصادية فى .....

« ارتفاع الأسعار – وفرة المعلومات – انخفاض الاسعار – ندرة الموارد بالنسبة للحاجات »

د – تتمثل خصائص الحاجات فى الآتى عدا ....

« الإشباع – التنوع – الثبات – التطور »

• مجالات الاقتصاد

لعلم الاقتصاد أربعة مجالات :

١. الاقتصاد الكلى أو التجميعى : والذى يتناول المستويات العامة للنشاط الاقتصادى .

٢. الاقتصاد الجزئى أو الوحدى : والذى يتناول سلوك الوحدات الاقتصادية كمستهلكين أو منتجين (العرض و الطلب)

٣. اقتصاديات الرفاهية : والذى يتناول تقييم السلوك الاقتصادى فى ضوء تحقيق معايير الكفاءة .

٤. اقتصاديات النمو والتنمية : والذى ينظر إلى المستقبل وما نعده له من إمكانيات للنمو والتنمية .

• تعريف علم الاقتصاد

هو علم اجتماعى يدرس المشكلة الاقتصادية المتمثلة فى الندرة النسبية للموارد القابلة لإشباع الحاجات المتعددة للإنسان ، وكيفية استخدام هذه الموارد المحدودة على أفضل نحو مستطاع ، حتى يمكن الوصول إلى أقصى إشباع ممكن لتلك الحاجات .

البشرية المتاحة فى العملية الإنتاجية من جانب الأفراد « المعلم الطبيب الضابط إلخ » .

جـ - موارد مصنعة « رأس المال » : تلك الموارد الناتجة عن تفاعل الإنسان مع الطبيعة ، وتعرف برأس المال المادى مثل الموارد الطبيعية المستخرجه من الأرض بعد معالجتها صناعيًا وتحويلها إلى معدات والآت إنتاجية كالحديد والألمونيوم وكذلك المنتجات الأولية الزراعية التى تدخل فى بعض الصناعات « كالقمح والقطن والصوف »

وبعد أن تعرفت عزيزى الطالب على كل من الحاجات والموارد ، سنتعرف على السلع .

السلع : هى الوسائل التى تصلح لاشباع الحاجات بطريق مباشر أو غير مباشر وتنقسم الى:

أ – سلع إستهلاكية . ب– سلع إنتاجية .

أ – سلع إستهلاكية : وهى تصلح لإشباع الحاجات بطريقة مباشرة

أمثلة الحذاء ، وجبة الغذاء ، إلخ .

ب – سلع إنتاجية : وهى تصلح لإشباع الحاجات بطريقة غير مباشرة ، سواء بالمساعدة فى إنتاج السلع التى تصلح لذلك أو بعد إجراء عدة عمليات عليها لكى تصبح صالحة للإستخدام .

أمثلة الجلد المستخدم فى تصنيع الحذاء ، الآلات ، المعدات ، إلخ »

ملاحظة هامة تصنف السلع إلى إستهلاكية أو إنتاجية بالرجوع إلى طريقة الاستخدام التى خصصت لها ، وليست خصائص السلعة ذاتها .

- **أهمية المعلومات**

كما ذكرنا سالفًا تتمثل المشكلة الاقتصادية فى وجود حاجات عديدة وموارد محدودة ، كلما زاد حجم المعلومات المتاحة عند اتخاذ القرارات الاقتصادية عن الحاجات القابلة للإشباع والموارد المتاحة ، فترتب على ذلك ما يلى :–

أ – زيادة قدرة النظام الإقتصادى على حل المشكلة الاقتصادية .

ب – الاستخدام الأمثل لكل الموارد والإمكانيات والكفاءات المتاحة وتقليل الهدر إلى صفر .

ج - تتحدد كفاءة النظام بقدرتة علي توفير أكبر قدر من المعلومات المناسبه عند إتخاذ القرار الإقتصادي .

- **المشكلة الإقتصادية مشكلة عامة (الندرة و الإختيار) :**

ووجود موارد نادره أدى إلى ظهور المشكلة الاقتصادية والتى تنتج عن تعدد الأهداف وندرة الموارد ، وهنا تظهر مشكلة الندرة والاختيار أو تكلفة الفرصة الضائعة أى أن اختيار هدف يعنى التضحية بالأهداف الآخرى التى كان يمكن إشباعها بالوسائل نفسها .

مثال قطعة أرض فضاء إذا أقمنا عليها منزل نضحى بإقامة مدرسة أو مصنع .. وهكذا

الموارد

- **التعريف**

الموارد هى كل ما يصلح لإشباع الحاجات البشرية بطريق مباشر أو غير مباشر .

والموارد بهذا الشكل متعددة ومتنوعة فالهواء مورد لأنه يشبع حاجة الفرد إلى التنفس ، والشمس كذلك مورد لأن أشعتها وحرارتها ضرورية للحياة بصفة عامة ، كذلك فإن الأرض الزراعية وما تنبته تعد من الموارد ، لأنها تشبع حاجة الفرد إلى الغذاء وأحيانا إلى الكساء وهكذا تتعدد الموارد ، والآن سنتعرف على أنواع الموارد

- **أنواع الموارد**

أولا : يمكن تقسيم الموارد من حيث خصائصها :

أ- من حيث تجددها :

١. **متجددة :** وهى تلك الموارد التى لديها القدرة على التجدد للمحافظة على نوعها ، أى إنها تزيد زيادة طبيعية ، ولكنها تحتاج لتنظيم استخدامها حتى يستمر الانتفاع بها ، فمثلًا الأشجار تنمو وتثمر وتخرج البذور التى تسقط على الأرض فتنبت شجرة من جديد .

٢. **فانية :** أى منتهية مثل الموارد الموجودة فى باطن الأرض ، فهى موجودة بكميات معينة وأنها تقل مع استمرار السحب منها مثل المعادن والبترول .

ب – من حيث ندرتها

١. **موارد اقتصادية** ويقصد بها تلك الموارد الموجودة بكمية أقل مما يشبع الحاجات ولها وحدها قيمة اقتصادية ، وهى التى يهتم بها علم الاقتصاد .

وهنا يجب الإشارة إلى الندرة النسبية تعنى أن المورد يوجد بكمية أقل مما يشبع كل الحاجات التى تصلح لإشباعها وأن اختلفت من فرد إلى أخرى ومن مجتمع إلى أخر ومن فترة إلى آخرى .

٢. **موارد حرة :** ويقصد بها تلك الموارد الموجودة بكميات غير محدودة ، أي أنها موجودة بكمية أكبر مما يشبع كل الحاجات التى تصلح لإشباعها .

ثانيا : يمكن تقسيم الموارد من حيث طبيعتها إلي :

أ- موارد طبيعية : ويقصد بها الأشياء والتى ليس للإنسان دخل مباشر فيها ، لأنها من صنع الله وحده ، ويكون لها تأثير مباشر على الثروة القومية « الغابات ، التضاريس ، المعادن ، البحار ، الأنهار »

ب – موارد بشرية « العنصر البشرى » : وتتمثل فى المجهود البشرى « فكرى ، يدوى ، خدمى » ، الذى تبذله القوى

الحاجات

- **التعريف**

الحاجة هى شعور بالحرمان يلح على الفرد ، مما يدفعه إلى القيام بما يساعده على القضاء على هذا الشعور ، ومن ثم يؤدى لإشباع حاجاته .

- **أنواع الحاجات**

يمكن تقسيم الحاجات حسب أهميتها لحفظ الحياة إلى :

١. حاجات أولية : وهى الحاجات الضرورية لحفظ وجود الإنسان مثل المأكل ، الملبس ، المسكن .

٢. حاجات ثانوية : وهى حاجات نفسية واجتماعية متعلقة بالوسط الحضارى الذى يعيش فيه الإنسان وقد تكون فردية أو جماعية مثل (الصحة ، التعليم ، الأمن ، العدالة) .

- **خصائص الحاجات**

١. الإشباع: تتسم الحاجات بأنها قابلة للإشباع ، أى أن الإنسان يستطيع إشباع حاجاته بمجرد استخدام الوسائل المناسبة بما يؤدى تدريجيا إلى تناقص الشعور بالحرمان وهذا الأمر يمثل ظاهرة « تناقص المنفعة الحدية وهى تعنى « تناقص الشعور بالحرمان مع زيادة الوحدات المستخدمة من الوسيلة المناسبة لإشباع الحاجات .

مثال الكوب الأول من الماء يحقق إشباعًا يفوق بكثير الأكواب التالية للصائم والظمآن

٢. الزيادة المستمرة:حاجات الفرد وتكون قابلة للزيادة المستمرة ، حيث إن هناك دائما حاجات جديدة له فكلما نجح فى إشباع عدد معين من الحاجات ظهرت حاجات جديدة .

٣. التنوع : تتطور حاجات الإنسان بصورة مستمرة ويرجع ذلك إلى أن كل مرحلة عمرية لها احتياجاتها ، وكل وسط حضارى له احتياجاته فحاجات الإنسان فى الريف تختلف عنها فى المدينة ، كما أن العادات والتقاليد تلعب دورًا فى تحديد الحاجات .

٤. التجدد : تتجدد وتتعدد حاجات الإنسان دائمًا ، فكلما أشبع حاجه معينة تولدت مكانها حاجات أخرى فحاجات الإنسان تتجدد بعد إشباعها .

مثال : الجائع يستطيع أن يشبع حاجته بمجرد تناول الطعام ولكن سرعان ما يشعر بالجوع مرة أخرى .

الحاجات البشرية على النحو المتقدم هى المحرك الأساسى لكل النشاط الاقتصادى فالهدف النهائى للنشاط الاقتصادى هو إشباع الحاجات الإنسانية ، على أن ذلك لا يعنى أن كل الحاجات لها التأثير نفسه على النشاط الاقتصادى ، فليست حاجات كل فرد متساوية فى التأثير على الحياة الاقتصادية .

الفصل الأول

الاقتصاد والمشكلة الاقتصادية

الأهداف

يصبح الطالب فى نهاية دراسته لهذا الفصل قادرًا على أن :

١. يناقش مبررات دراسة علم الاقتصاد على مستوى الدولة والأفراد.

٢. يحدد الخصائص الأساسية للحاجات الإنسانية .

٣. يضع تعريفًا لمفهوم الموارد الاقتصادية

٤. يفسر اهتمام علم الاقتصاد بدراسة الموارد النادرة دون غيرها من الموارد الأخرى .

٥. يوضح مدى أهمية توافر المعلومات كعنصر مساعد فى حل المشكلة الاقتصادية .

٦. يوضح مفهوم المشكلة الاقتصادية فى ضوء عنصرى الندرة والاختيار .

٧. يشرح علاقة الاقتصاد بمشكلة الاختيار .

٨. يوضح مدى ارتباط مفهوم الاختيار بمفهوم التضحية ، ومكانة مفهوم التضحية بالنسبة لعلم الاقتصاد .

٩. يحدد مجالات علم الاقتصاد .

١٠. يضع تعريفا لعلم الاقتصاد .

- **تمهيد**

إننا نعيش فى عصر تحتل فيه المشكلة الاقتصادية سواء بالنسبة للدول النامية التى تنتمى إليها أو بالنسبة للدول المتقدمة مكان الصدارة فى اهتمامات الرأى العام ، وفى مثل هذه الظروف تعتبر المعرفة بأساسيات علم الاقتصاد ضرورة حيوية لكل مواطن ؛ حتى يستطيع أن يتابع الأحداث والتطورات العامة ويشارك فيها مشاركة فعالة .

ورغم أن المشكلة الاقتصادية قديمة قدم العالم ، فإن ظهور علم الاقتصاد هو أمر حديث نسبيا .

والاقتصاد هو فرع من المعرفة العلمية ، التى تبحث بشكل منظم فى كيفية مواجهة هذه المشكلة الاقتصادية .

وإذا كان من الطبيعى أن نبدأ دراسة الموضوع ببدايته الطبيعية ألا وهى تعريفه ، فإن ذلك لن يكون متيسرا قبل أن نحيط بطبيعة المشكلة الاقتصادية ذاتها ، ويتطلب هذا أن نتعرض لموضوعي الحاجات والموارد.

مقدمة الاقتصاد

عزيزى الطالب

بين يديك مادة الاقتصاد التى تقدم إليك صورة مبسطة عن علم الاقتصاد وتطوره ودوره فى حياتنا حتى يمكنك مواكبة التطورات الاقتصادية من حولك ، وفهم كل جديد فى عالم الاقتصاد ، لتستطيع التعايش والتعامل مع كل ما يتعلق بالقضايا الاقتصادية .

ففى هذا الكتاب سوف يناقش الموضوعات التالية

- فى الفصل الأول وعنوانه « الاقتصاد والمشكلة الاقتصادية »

يشرح مبررات دراسة علم الاقتصاد موضحًا مدى أهمية توافر المعلومات كعنصر مساعد فى حل المشكلة الاقتصادية ، وكذلك سيناقش مجالات علم الاقتصاد

- فى الفصل الثاني وعنوانه « عناصر الإنتاج »

يفرق بين عناصر الإنتاج المختلفة موضحًا خصائص كل منهم .

- فى الفصل الثالث وعنوانه « الدخل القومى »

يتعرف على مفهوم الدخل القومى والفرق بينه وبين مفهوم الناتج القومى ، وعلاقتهما بمستوى التقدم الاقتصادى للدول .

- فى الفصل الرابع وعنوانه « المالية العامة ودور الدولة »

يتتبع دور الدولة فى النشاط الاقتصادى بمجالاته الثلاث ، وكذا أهم المبادئ القانونية والعامة لتحقيق كفاءة السياسة الضريبية وانعكاسات ذلك على الإيرادات العامة ، ويستعرض أيضا ملامح التطوير التى لحقت بمبدأ توازن الموازنة العامة فى الفكر الحديث .

- فى الفصل الخامس وعنوانه « النقود والبنوك »

يوضح الظروف التى أدت إلى نشأة النقود ، ومراحل تطورها ، كما يوضح أيضا الفرق بين النقود الائتمانية والنقود الورقية ، ودور البنك المركزى فى إصدارها ، كما يعرض تطور وسائل الدفع الإلكترونية والنقود الرقمية .

وأخيرا فى الفصل السادس وعنوانه « العلاقات الاقتصادية الدولية »

يحدد خصائص التجارة الدولية التى تميزها عن التجارة الداخلية ، خاصة فى ظل التغيرات الاقتصادية المصاحبة لعملية العولمة ، وأثر ذلك على ميزان المدفوعات لكل دولة .

وأخيرا نتمنى عزيزى الطالب أن تستفيد من ما بين يديك لتسهم به فى نهضة وتنمية مجتمعك

المؤلف والمراجع

ولجنة التعديل

ومركز تطوير المناهج والمواد التعليمية

لجنة تعديل وتعميق البعد الافريقي

م	الاسم	الجهة
١	أ . د / حمدنا الله مصطفي حسن	كلية الآداب جامعة عين شمس (تاريخ حديث ومعاصر)
٢	أ . د / عزيزة بدر	معهد البحوث الافريقية / جامعة القاهرة (جغرافيا)
٣	د / سالي محمد فريد	معهد البحوث والدراسات الافريقية (اقتصاد افريقي وتنمية)
٤	د / محمود محمد إبراهيم عطية	مدير عام تنمية مادة الدراسات الاجتماعية بديوان عام الوزارة
٥	د / ثناء أحمد جمعة	رئيس قسم الدراسات الاجتماعية بمركز تطوير المناهج
٦	د / ميرفت عبد النبي سيد	خبير بمركز تطوير المناهج والمواد التعليمية

المواصفات الفنية:

مقاس الكتاب:	$\frac{1}{8}$ (٥٧×٨٢) سم
طبع المتن:	٤ لون ـ ١ لون
طبع الغلاف:	٤ لون
ورق المتن:	٨٠ جم أبيض
ورق الغلاف:	٢٠٠ جم كوشيه
عدد الصفحات بالغلاف:	١٩٢ صفحة
رقم الكتاب:	١٥٤٣/٢٠/١٥/٣٣/٣/٢٧

http://elearning.moe.gov.eg

جمهورية مصر العربية
وزارة التربية والتعليم والتعليم الفنى
الإدارة المركزية لشئون الكتب

الاقتصاد

للثانوية العامة

تأليف
دكتور / حازم الببلاوى

مراجعة
دكتور / أحمد جامع

إشراف علمى
مستشار الدراسات

إشراف تربوى
مركز تطوير المناهج

٢٠١٩ / ٢٠٢٠